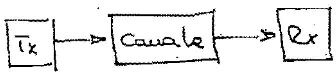
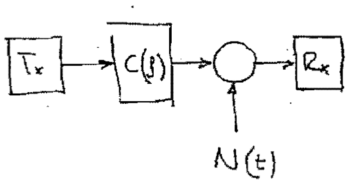
Quando si parla di comunicazioni elettriche gli esempi più significativi di segnali in uso, sono quelli "Telefonici" e quelli "video". Tipicamente un segnale telefonico ha una banda di frequenze che va da 300 Hz a 3400 Hz, BANDA SEGNALE TELEFONICO ottenuta mediante il filtraggio dell'intera banda vocale; il motivo di questo filtraggio è la riduzione del dell'ingombro frequenziale senza alterare l'itelleggibilità del messaggio. Il segnale video invece occupa una banda di frequenze che arriva fino a 5 MHz.
Entrambe i segnali sono di tipo analogico. Un segnale numerico può essere, ad esempio, la sequenza di bit trasmessa da un calcolatore elettronico.
Un concetto importante nel campo delle com. elettriche è il "RUMORE"; intuitivamente se misurassimo la tensione ai capi di un conduttore isolato a temperatura ambiente, verrebbe rilevata una tensione fluttuante a valor medio nullo; questa è di fatto dovuto allo stato di agitazione termica delle particelle subatomiche che non si trovano allo zero assoluto: esso si chiama appunto RUMORE TERMICO. DOVUTO QUINDI AL MOVIMENTO DELLE PARTICELLE SUBATOMICHE (AGITAZIONE TERMICA) Il rumore termico può essere rappresentato (modello matematico) con un PROCESSO stocastico $N(t)$. Durante la trasmissione di un segnale, quindi, si sovrappone ad esso un certo rumore; questo rumore può essere dovuto al (1) trasmettitore, al (2) canale trasmissivo o introdotto dal (3) ricevitore.
In realtà, essendo il trasmettitore un dispositivo di potenza, il rumore ad esso associato risulta percentualmente insignificante rispetto al segnale stesso.
Il canale di fatto ha il comportamento di un filtro $c(f)$.



Il sistema di comunicazione composto da trasmettitore (t_x) canale (c) e ricevitore (R_x) allora può essere schematizzatico come in figura; il



NUOVI VOCABOLI : SCHEMATIZZATICO !!

Il canale c, caratterizzato da un certo rumore, può essere schematizzato come un filtro privo di rumore $C(f)$ (in generale il comp. è P.B.) ; al segnale che percorre il canale non rumoroso si somma il processo $N(t)$ che rappresenta il rumore (indipendent. dalla sorgente che lo ha generato, ad esempio l'agitazione termica).

In generale la densità spettrale di potenza del processo rumore può essere schematizzata, per semplicità, come costante:

$$W_N(f) = S_N(f) = \frac{N_0}{2} = \text{costante}$$

Se integriamo $W_N(f)$ su tutto l'asse delle frequenze avremmo come risultato infinito, tuttavia, in tutte le applicazioni si considera una banda di frequenza limitata e quindi l'integrale suddetto, nell'intervallo finito, è appunto finito.

Un rumore con densità spettrale di potenza, si dice RUMORE BIANCO.

Come già detto il rumore ha valor medio nullo, quindi:

$$\eta_N = 0$$

e autocorrelazione

$$R_N(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

Il rumore così considerato è quindi STAZIONARIO in SENSO LATO. Il rumore che consideriamo è inoltre un processo GAUSSIANO; dalla t.d.s. sappiamo che un processo "stazionario in senso lato" se è Gaussiano è anche "stazionario in senso stretto".

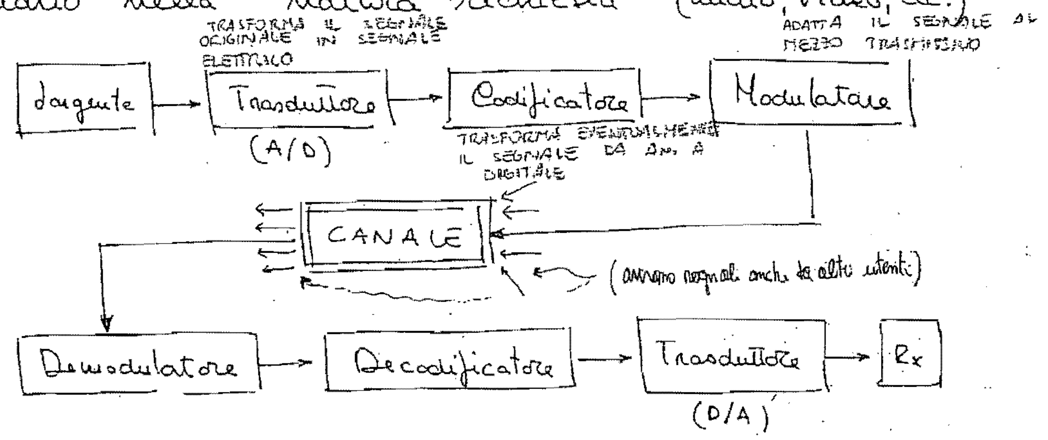
Il rumore così descritto si dice AWGN (Additive, White, Gaussian, Noise).

Si ricordi che un processo Gaussiano come l'AWGN ha alcune proprietà nei confronti di un blocco $H(f)$; sia $N(t)$ il rumore bianco e sia $X(t)$ l'uscita di $H(f)$ avremo:

$$N(t) \rightarrow \boxed{H(f)} \rightarrow X(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\eta_x = \eta_N H(0) = 0 \\ &R_x(\tau) = R_N(\tau) \otimes h(\tau) \\ &W_x(f) = W_N(f)\, H(f) \end{aligned}$$

In generale un canale ha un comportamento "passa banda", ovvero predilige una gamma di frequenza entro la quale l'attenuazione del segnale si mantiene ragionevole. La linea bifilare ad esempio ha una banda che va da 1 KHz a 1 MHz.

Approfondendo l'analisi di un sistema di telecomunicazioni, si possono individuare alcuni blocchi fondamentali: L'informazione è prodotta da una SORGENTE (ad esempio l'apparato vocale umano), questo segnale non essendo elettrico deve essere trasformato mediante un TRASDUTTORE, per poter utilizzare il canale.
Se la trasmissione è di tipo numerico, occorre un apparato di conversione Analogico-Digitale, che nella maggior parte dei casi ha sede nel trasduttore stesso.
Sempre nel caso di segnali numerici, è necessario "codificare", attraverso un CODIFICATORE, il segnale, con lo scopo di rendere identificabili e correggibili eventuali errori (Vedi Codici di trasmissione). Per adattare il segnale al mezzo di comunicazione occorre alterare il segnale stesso con un MODULATORE; grazie all'operazione di modulazione, sullo stesso canale possono coesistere più segnali.
La fase di ricezione è ovviamente il processo inverso che passa attraverso una DEMODULAZIONE, una DECODIFICA, una TRASDUTTORE, fino a portare il segnale al destinatario nella natura richiesta (audio, video, ecc.)



Cenni sui CODICI DI TRASMISSIONE: Nelle trasmissioni numeriche, esistono alcune operazioni per ottimizzare l'utilizzo del canale.

A. CODICI DI SORGENTE: Per limitare l'occupazione del canale, si può pensare di eliminare tutti gli elementi del "messaggio" che non siano fondamentali per l'intelleggibilità dell'informazione; si applicano allora dei "codici di sorgente" che hanno il compito di togliere secondo una certa logica tutta la "ridondanza" presente nel messaggio.

B. CODICI DI CANALE: Il messaggio privato della ridondanza è ovviamente più suscettibile agli errori; a seconda del canale di trasmissione e quindi delle interferenze possibili; si sceglie di reintrodurre una parte della ridondanza per migliorare l'immunità ai disturbi.

C. CODICI DI LINEA: Per adattare il segnale alla linea di trasmissione, si introduce una correlazione fra i simboli del segnale numerico in questo modo si modifica la composizione spettrale del segnale stesso. Questa operazione è regolata dai cosiddetti Codici di Linea.

RICHIAMI SULLA FUNZIONE DELTA DI DIRAC $\delta(t)$

La funzione $\delta(t)$ è tale per cui data una funzione $f(t)$ è verificata la seguente:

PROPRIETÀ CONVOLUZ. DELTA DI DIRAC $\delta(t)$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)}$$

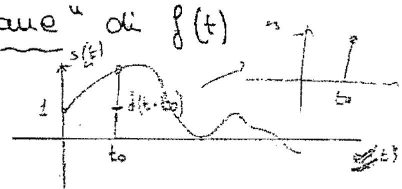
per definizione, allora, ponendo $f(t) = 1$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1}$$

Questa funzione gode di alcune proprietà:

1. Proprietà CAMPIONATRICE della $\delta(t)$
   Il prodotto di un segnale $s(t)$ e la funzione $\delta(t)$ centrata in t_0, fornisce un "campione" di $f(t)$ in t_0:

$$\boxed{s(t)\,\delta(t-t_0) = s(t_0)\,\delta(t-t_0)}$$



2. Proprietà della CONVOLUZIONE
   La convoluzione di un segnale $s(t)$ e la funzione $\delta(t)$ centrata in t_0, corrisponde ad una traslazione di $f(t)$ in t_0:

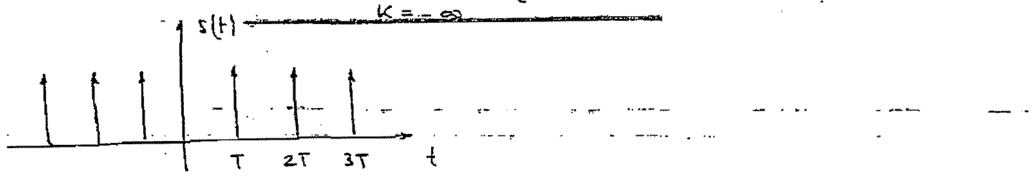
$$\boxed{s(t) \otimes \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\nu-t_0)\,s(t-\nu)\,d\nu = s(t-t_0)}$$

La funzione $\delta(t)$ non è che un'astrazione matematica, che può essere ottenuta come limite di funzioni ordinarie.

Esempio

Si consideri un segnale "pettine di $\delta(t)$" definito da

$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$



il segnale può essere sviluppato con la serie di Fourier, ovvero

$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n \left(\frac{t}{T}\right)}$$

nella quale C_n è il coefficiente dello sviluppo dato dalla seguente:

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} c(t)\, e^{-j2\pi n \frac{t}{T}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)\, e^{-j2\pi n \frac{t}{T}}\, dt = \frac{1}{T}$$

Questo risultato è ottenuto mediante la proprietà campionatrice del delta di dirac, infatti:

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)\, e^{-j2\pi n \frac{t}{T}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)\, e^{-j2\pi n \frac{0}{T}}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)\, dt = \frac{1}{T}$$

Ricordiamo che

$$\delta(t - t_0)\, s(t) = s(t_0)\, \delta(t - t_0)$$

ponendo $t_0 = 0$

$$\delta(t)\, s(t) = s(0)\, \delta(t)$$

lo sviluppo in serie di Fourier diviene

$$c(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta(t - KT) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n \frac{t}{T}} =$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{j2\pi n \frac{t}{T}} =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n \frac{t}{T}}$$

A questo punto possiamo applicare la Trasformata di Fourier del segnale periodico; in particolare sappiamo che

PROPRIETÀ TRASFORMATA DI FOURIER, RITARDO DI t_0 $\mathcal{F}[f(t-t_0)] = F e^{j2\pi f_0 t}$

$$\mathcal{F}\left[e^{j2\pi f_0 t}\right] = \delta(f - f_0)$$

allora

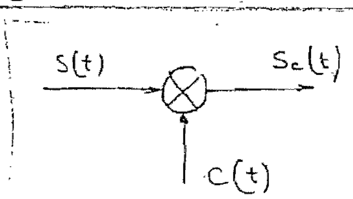
$$C(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_0)$$

Un segnale che nel dominio del tempo è una sequenza di $\delta(t)$ distanziati di T, nel dominio della frequenza è sempre una sequenza di impulsi $\delta(t)$ distanziati di $1/T$ e ampiezza $1/T$

*

CAMPIONAMENTO IDEALE

Sia $s(t)$ un segnale; campionare tale segnale significa trasformarlo in $s_c(t)$, ovvero una sequenza di impulsi di ampiezza uguale all'ampiezza di $s(t)$ nell'istante considerato.



È UN TRENO DI IMPULSI UNITARI

Il segnale $c(t)$ che è il segnale campionatore, è definito come segue

$$c(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta(t - KT)$$

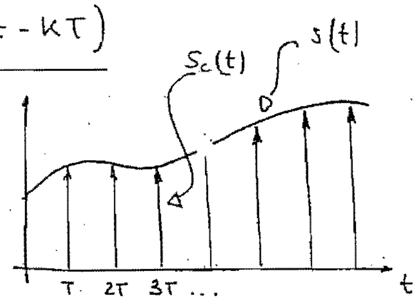
e con T si indica il periodo di campionamento.

$$s_c(t) = s(t) \cdot c(t)$$

$$\underline{s_c(t)} = s(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t)\,\delta(t-kT) =$$

× proprietà del campionamento $\quad = \underline{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT)\,\delta(t-kT)}$



Ad esempio se $s(t)$ ha un generico andamento (vedi figura) il segnale campionato $s_c(t)$ è una sequenza di impulsi che assumono l'ampiezza di $s(t)$ negli istanti $t=kT$.
~~Calcoliamo lo spettro in frequenza del segnale~~ campionato $s_c(t)$.

$$S_c(f) = S(f) \otimes C(f)$$

questo perché T.d.F del prodotto è la convoluzione e viceversa $\mathcal{F}[s(t)\cdot c(t)] = S(f)\otimes C(f)$

allora

$$S_c(f) = S(f) \otimes \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\,\delta\left(f-\frac{m}{T}\right) =$$

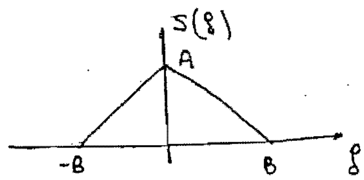
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[S(f)\otimes \delta\left(f-\frac{m}{T}\right)\right]\frac{1}{T} =$$ Siccome la convoluzione è un operatore lineare.

Siccome la convoluzione non è che una traslazione, come testimonia la proprietà 2, precedentemente richiamata, avremo:

$$S_c(f) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f)\otimes\delta\left(f-\frac{m}{T}\right) =$$

$$= \underline{\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S\left(f-\frac{m}{T}\right)}$$

Supponiamo che il segnale $s(t)$ sia caratterizzato da uno spettro $S(f)$, come in figura



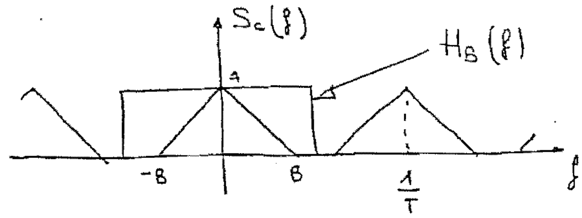
Per determinare l'andamento dello spettro $S_c(f)$ del segnale campionato, distinguiamo due casi:

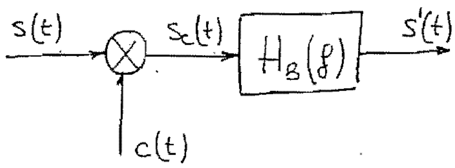
1. Se $\frac{1}{T} = F \geq 2B$ avremo:

$$\frac{1}{2T} \geq B$$

allora lo spettro di $S_c(t)$ non è che la ripetizione dello spettro $S(f)$ a distanza di $1/T$, non sovrapposti.

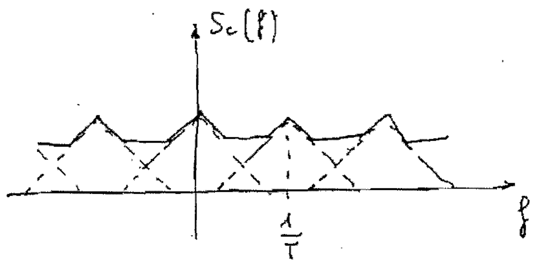
In questo caso è facile intuire che per ricostruire il segnale di partenza è sufficiente filtrare il segnale campionato con un dispositivo che selezioni la gamma di frequenze che va da $-B$ a B.





con $H_B(f) = \frac{1}{T} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$

2. Se $\frac{1}{T} = F < 2B$ le code degli spettri $S(f)$ di $s(t)$ ripetuti nello spettro del segnale campionato, si sovrappongono: questo fenomeno è detto ALIASING ed impedisce la ricostruzione del segnale $s(t)$ a partire da quello campionato.



La condizione appena vista, per garantire la possibilità di ricostruire un segnale a partire dal segnale campionato

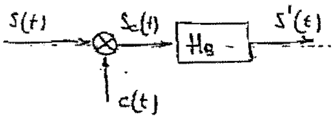
$$\boxed{\frac{1}{T} = F \geq 2B}$$

è detta CONDIZIONE DI NYQUIST.

Analizziamo il filtro $H_B(f)$ per la ricostruzione del segnale originale:

$$H_B(f) = \frac{1}{T}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

ricordiamo che



$$\mathcal{F}^{-1}\left[H_B(f)\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{T}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)\right] = \frac{1}{T}\,2B\,\mathrm{sinc}(2Bt)$$

$$h_B(t) = \mathrm{Sinc}(2Bt)$$

nella condizione limite in cui $\frac{1}{T} = F = 2B$

$$h_B(t) = \mathrm{Sinc}(Ft) = \mathrm{Sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Siccome

$$S'(f) = S_c(f)\cdot H_B(f)$$

$$s'(t) = s_c(t) \otimes h_B(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT)\,\delta(t-kT) \otimes h_B(t)$$

Sulla base della FORMULA DI INTERPOLAZIONE $(F=2B)$

$$\boxed{s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-kT}{T}\right) \qquad F=2B}$$

possiamo dire che

$$s'(t) = s_c(t) \otimes h_B(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT)\,\delta(t-kT) \otimes \mathrm{Sinc}\left(\frac{t}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT)\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{t-kT}{T}\right) = s(t)$$

cioè il segnale $s(t)$ può essere ottenuto come somma di infinite Sinc centrate negli istanti dei campioni con ampiezza del campione stesso.

Alla luce di quanto detto esiste il teorema del campionamento o teorema di Shannon che riassume le condizioni per la ricostruzione di un segnale.

11

TEOREMA DI SHANNON: Se un segnale $s(t)$ è a banda limitata B esso è completamente descritto dai suoi campioni istantanei uniformemente spaziati nel tempo con periodo $T \leq \frac{1}{2B} \Rightarrow \frac{1}{f} \leq \frac{1}{2B} \Rightarrow f \geq 2B$
In altri termini dal segnale campionato si può risalire al segnale originale.

La formula di interpolazione appena scritta è valida nel caso limite $F = 2B$; nel caso più generale vale la seguente:

FORMULA DI INTERPOLAZIONE
per $F \geq 2B$

$$\boxed{s(t) = \frac{2B}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT)\, \mathrm{Sinc}\left[2B\left(t - kT\right)\right]}$$

Osserviamo che la condizione di Shannon $F \geq 2B$ dice anche che all'aumentare di F le ripetizioni dello spettro si allontanano; nel dominio del tempo significa aumentare il numero di campioni e si parla di SOVRACAMPIONAMENTO.
Questa condizione è necessaria perchè un filtro reale di fatto non ha una banda rigorosamente rettangolare, quindi, se aumenta la distanza fra le ripetizioni di spettro, possiamo scegliere un filtro sempre più dolce.

Nota: Un segnale reale non ha mai una banda rigorosamente finita, quindi è necessario filtrare $s(t)$ prima del campionamento per definire l'intervallo $[-B, B]$.

La formula di interpolazione, facendo uso della funzione Sinc, è un'astrazione matematica; per questo motivo è necessario stabilire come costruire un filtro reale in base al risultato che si vuole ottenere, ovvero sulla base

della qualità richiesta nel segnale ricostruito, è necessario decidere come approssimare la risposta del filtro H_B, in modo da ottenere una risposta) H_1, fisicamente realizzabile.
Consideriamo allora un filtro reale $h_1(t)$:

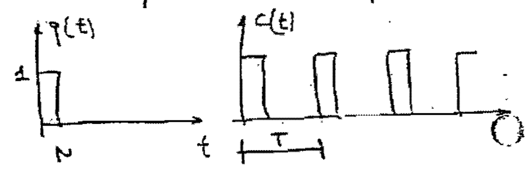
$$H_1(f) \Longleftrightarrow h_1(t)$$

e osserviamo come si modifica la ricostruzione del segnale $s(t)$, ovvero analizziamo qual'è il risultato dell'operazione:

$$s'(t) = s_c(t) \otimes h_1(t)$$

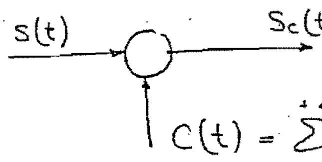
CAMPIONAMENTO NATURALE

Siccome l'impulso di Dirac è anch'esso una astrazione matematica, non è fisicamente possibile campionare un segnale con tale impulso.
Consideriamo allora un segnale di campionamento $c(t)$ costituito da una sequenza di impulsi, comunque di breve durata: sia $q(t)$ un impulso unitario di durata τ, costruiamo il segnale $c(t)$ nel modo seguente

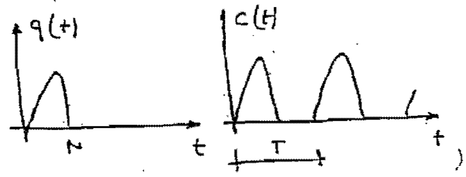


$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q(t-kT) \qquad q(t) = rect\left(\frac{t-\tau/2}{\tau}\right)$$

Anche l'impulso rettangolare di fatto è fisicamente irrealizzabile, perciò si ricorre ad un impulso "arrotondato"

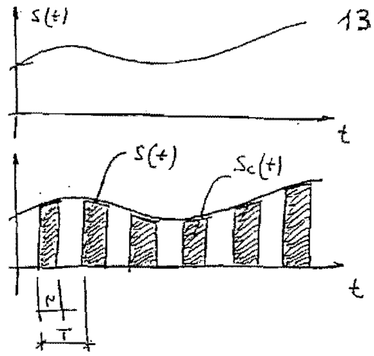


$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q(t-kT)$$



Questo è quello che si chiama CAMPIONAMENTO NATURALE.
Se ad esempio consideriamo $q(t)$ rettangolare e supponiamo di voler campionare un segnale generico

$s(t)$, il risultato del campionamento sarà costituito da porzioni di durata τ del segnale:



$$S_c(t) = s(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q(t-kT)$$

Analizziamo cosa accade in frequenza. Siccome

$$c_1(t) = \sum_k q(t-kT) = q(t) \otimes \sum_k \delta(t-kT)$$

in frequenza:

$$C_1(f) = Q(f) \sum_k \delta\left(f-\frac{k}{T}\right)\frac{1}{T} =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_k Q(f)\, \delta\left(f-\frac{k}{T}\right) =$$

inoltre essendo

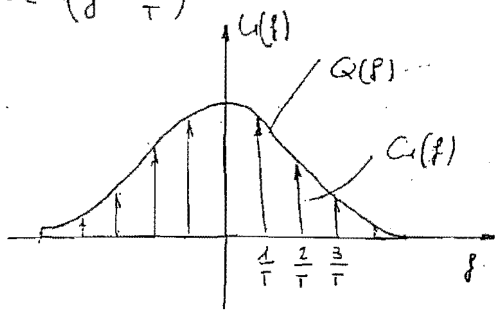
$$q(t) = rect\left(\frac{t-T/2}{\tau}\right) \quad e \quad Q(f) = \tau \operatorname{sinc}(f\tau)\, e^{-j2\pi f\frac{T}{2}}$$

avremo:

$$C_1(f) = \frac{1}{T} \sum_k \tau \operatorname{sinc}(f\tau)\, e^{-j\pi f T}\, \delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

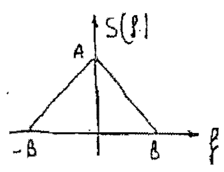
Lo spettro del segnale campionatore sarà costituito da una sequenza di impulsi di dirac che assumono l'area della sinc, centrati in $\left(f-\frac{k}{T}\right)$

Noto l'andamento di (f) lo spetro del segnale di campionamento è quello di figura a lato



Per studiare lo spettro del segnale campionato $S_c(t)$, assumiamo che $s(t)$ abbia uno spettro generico $S(f)$ con banda B e ampiezza A.

Allora ricordando che



$$S_c(t) = s(t) \cdot c_1(t)$$

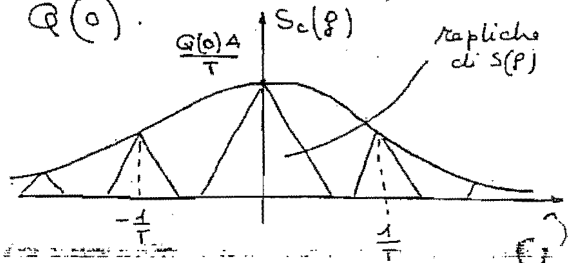
avremo

$$S_c(f) = S(f) \otimes C_1(f)$$

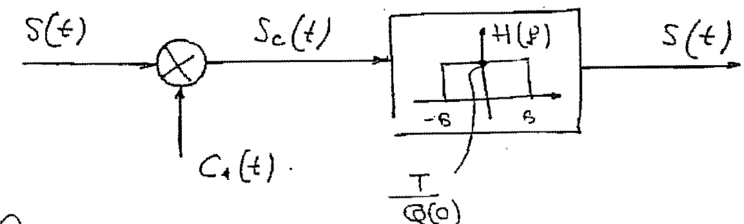
ovvero:

$$S_c(f) = \frac{1}{T} \sum_K Q\left(\frac{K}{T}\right) S\left(f - \frac{K}{T}\right)$$

che consiste in una ripetizione attenuata o amplificata dello spettro $S(f)$. Per $K = 0$ lo spettro è amplificato del fattore $Q(0)$.

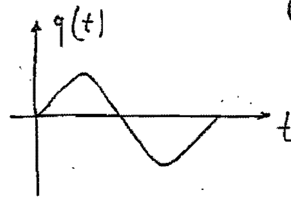


Anche in questo caso vale il teorema di Shannon, perciò se $F \geq 2B$, è possibile ricostruire il segnale di partenza da quello campionato. Tuttavia il filtro deve attenuare dello stesso fattore $Q(0)$, per ripartarci a $S(t)$



Consideriamo ora un impulso di campionamento $q(t)$ a media nulla, cioè tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(t)\, dt = 0$$



Allora

$$Q(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

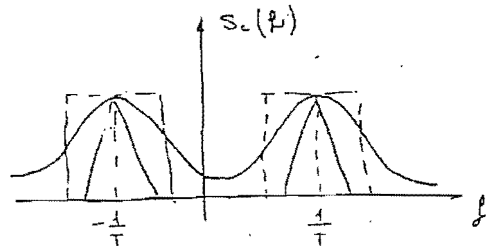
e dalla teoria dei segnali sappiamo che

$$Q(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(t)\, dt$$

quindi si ha uno spettro $Q(f)$ nullo nell'origine. Questo fatto si ripercuote sul segnale campionato annullando la replica dello spettro $S_c(f)$ nell'origine infatti come già visto

$$S_c(f) = \frac{1}{T} \sum_n Q\left(\frac{n}{T}\right) S\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

noto lo spettro $S(f)$, quello del segnale campionato $S_c(f)$ risulta, qualitativamente come in figura.

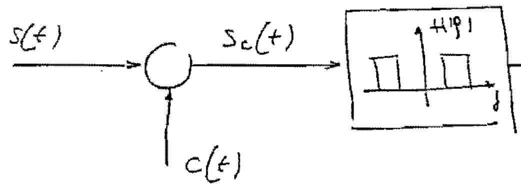


La componente informativa è contenuta in ognuna delle repliche, quindi per ricostruire il segnale $s(t)$, basta filtrare una delle suddette repliche, ad esempio quella centrata in $1/T$.

Il risultato del filtraggio, però, non è esattamente il segnale di partenza, ma una sua versione traslata in frequenza; ricordando che una traslazione in f coincide con la moltiplicazione per un coseno nel tempo:

$$s'(t) = s(t) \cdot \cos\left(2\pi \frac{1}{T} t\right)$$

per giungere ad $s(t)$ è necessario, dopo il filtraggio un'operazione di DEMODULAZIONE.



$s'(t) \propto s(t) \cdot \cos\left(2\pi \frac{1}{T} t\right)$

In questo caso si dice che $s'(t)$ è la versione modulata in ampiezza di $s(t)$ (concetto che sarà chiarito in seguito).

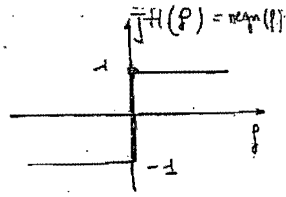
RAPPRESENTAZIONE IN BANDA BASE DI SEGNALI
(Rappresentazione Complessa di segnali reali).

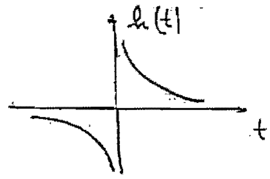
Si consideri un generico segnale reale $x(t)$.

TRASFORMATA DI HILBERT $\check{x}(t)$

Si definisce trasformata di Hilbert $\check{x}(t)$, del segnale $x(t)$ il segnale ottenuto dall'operazione di filtraggio con

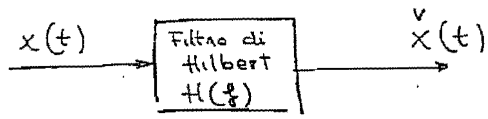
risposta in frequenza
$$\boxed{\begin{aligned} H(f) &= -j\,\mathrm{sign}(f) \\ h(t) &= \frac{1}{\pi t} \end{aligned}}$$





Il filtro $H(f)$ si dice in questo caso FILTRO DI HILBERT; l'operazione può essere schematizzata nel modo seguente:

$$\mathrm{sign}(f) = \begin{cases} 1 & f \geq 0 \\ -1 & f < 0 \end{cases}$$



Schema della Trasformata di Hilbert $\check{x}(t)$ di $x(t)$

Osserviamo che:
$$|H(f)| = 1 \quad e \quad \arg H(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & f \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & f < 0 \end{cases}$$

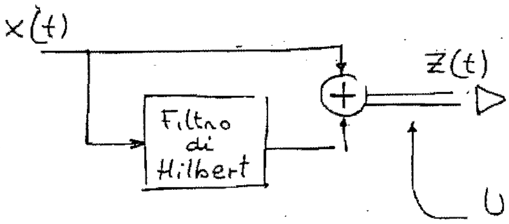
filtro di Hilbert = filtro REALE che altera solamente la fase

SEGNALE ANALITICO $z(t)$

Si definisce segnale analitico $z(t)$, del segnale $x(t)$ il segnale complesso ottenuto sommando lo stesso $x(t)$ alla sua trasformata di Hilbert $\check{x}(t)$ moltiplicata per l'unità immaginaria:

$$\boxed{z(t) = x(t) + j\,\check{x}(t)}$$

Il segnale analitico $z(t)$, può essere schematizzato come segue.



Schema del Segnale Analitico $z(t)$ di $x(t)$

Un segnale complesso si indica con una doppia linea

Osserviamo cosa accade in frequenza.

17

Nota: Un segnale $s(t)$ è a simmetria Hermitiana se:

$$S(f) = S^*(-f)$$ (ovvero ha la parte reale pari e quella immaginaria dispari)

mentre $s(t)$ è a simmetria AntiHermitiana se:

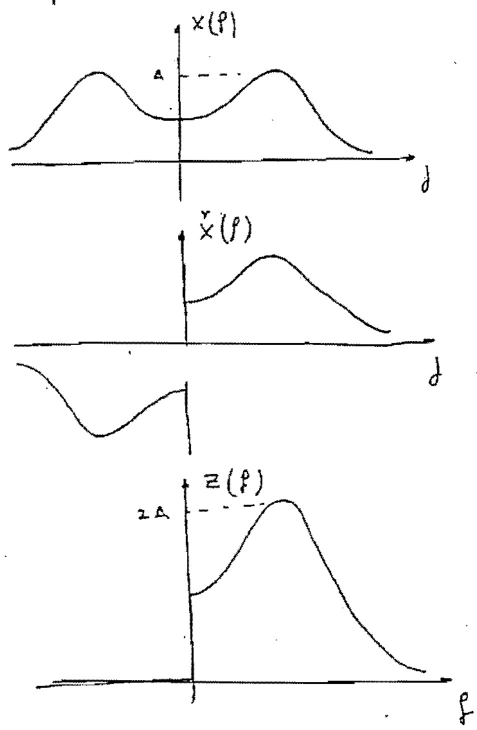
$$S(f) = -S^*(-f)$$

Siccome il segnale Analitico $z(t)$ di $x(t)$ è un segnale complesso, risulta di fatto che la combinazione lineare della sua parte reale e della sua parte immaginaria. Per la linearità della trasformata di Fourier è:

$$\boxed{Z(f) = X(f) + j\check{X}(f)}$$

In quanto segnale reale

Supponiamo allora $x(t)$ a simmetria Hermitiana con un generico spettro $X(f)$, qualitativamente come in figura, lo spettro del segnale analitico $Z(f)$ non è che quello del segnale $x(t)$, privato delle frequenze negative e moltiplicato per due.



$$\check{X}(f) = X(f)H(f) =$$
$$= -j\,\text{sgn}(f)X(f)$$

$$Z(f) = X(f) + \text{sgn}(f)X(f)$$

osserviamo che

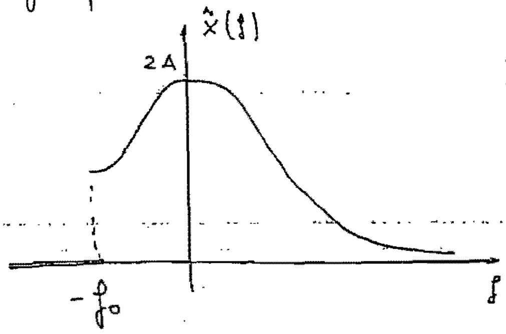
$$\text{sgn}(f)X(f) = \begin{cases} X(f) & f \geq 0 \\ -X(f) & f < 0 \end{cases}$$

INVILUPPO COMPLESSO $\tilde{x}(t)$ DEL SEGNALE $x(t)$ RISPETTO A f_0

Scelta una frequenza f_0 arbitraria, si definisce inviluppo complesso $\tilde{x}(t)$ del segnale $x(t)$ rispetto alla frequenza f_0, il segnale ottenuto moltiplicando il segnale analitico $z(t)$ per l'esponenziale complesso $\exp(-j2\pi f_0 t)$. Di fatto questa operazione

consiste nella traslazione in frequenza sinistra
segnale analitico in $-f_0$:

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= z(t)\cdot e^{-j2\pi f_0 t}\\ \tilde{X}(f) &= Z(f+f_0)\end{aligned}}$$



In riferimento alle figure precedenti si può tracciare lo spettro di $\tilde{x}(t)$.

Vediamo come ricostruire il segnale originale $x(t)$ dai segnali appena definiti. Osserviamo innanzi tutto che:

$$x(t) = Re\{z(t)\} = Re\{\tilde{x}(t)\, e^{j2\pi f_0 t}\}$$

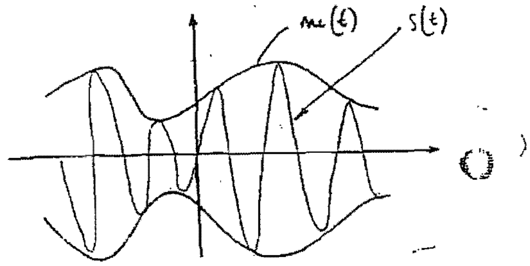
Esempio

Supponiamo di avere un segnale $s(t)$ così definito:

$$s(t) = m(t)\cos 2\pi f_0 t$$

nel quale $m(t)$ è un segnale qualsiasi, con l'andamento di figura.

$m(t)$ si dice INVILUPPO del COSENO.



Come già detto:

$$x(t) = Re\{\tilde{x}(t)\, e^{j2\pi f_0 t}\} \quad (1.1)$$

siccome anche $\tilde{x}(t)$ è un segnale complesso, può essere scritto esplicitando parte reale e parte immaginaria:

$$\boxed{\tilde{x}(t) = x_c(t) + j\, x_s(t)} \quad (*)$$

nella quale $x_c(t)$, la parte reale, è detta

COMPONENTE IN FASE (spesso indicata anche con $x_I(t)$), mentre $x_s(t)$, la parte immaginaria, è detta COMPONENTE IN QUADRATURA (spesso indicata con $x_Q(t)$).
Tornando al discorso di prima:

$$x(t) = Re\{z(t)\} = Re\{\tilde{x}(t)\, e^{j2\pi f_0 t}\} =$$

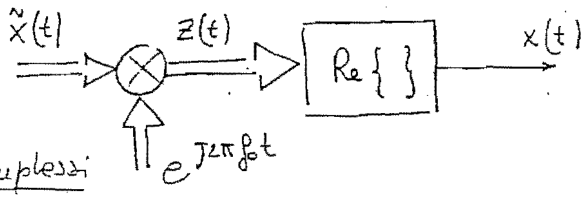
$$= Re\{[x_c(t) + j x_s(t)][\cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t)]\} =$$

$$= x_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_s(t)\sin(2\pi f_0 t) \qquad (1.2)$$

Abbiamo stabilito la relazione che lega il segnale $x(t)$ alla componente in quadratura e alla componente in fase dell'inviluppo complesso in f_0.
Sulla base della relazione (1.1), si può tracciare il seguente schema per segnali complessi:

$\boxed{\tilde{x}(t) \to x(t)}$

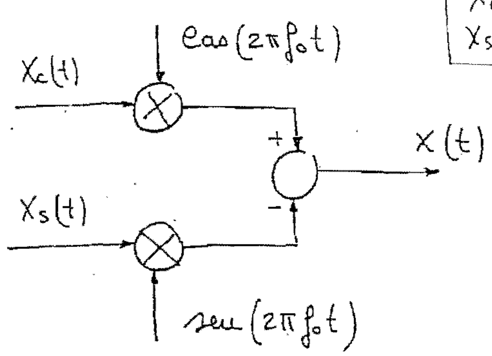
Schema per il passaggio da $\tilde{x}(t)$ a $x(t)$ per segnali complessi



Sulla base della (1.2), si può tracciare lo schema equivalente per segnali reali:

$\boxed{\left.\begin{matrix} x_c(t) \\ x_s(t) \end{matrix}\right\} \to x(t)}$

Schema 1. per il passaggio dal componenti in fase(*) e quadratura dell inviluppo ca al segnale di partenza.



Per completezza osserviamo che

$$\check{x}(t) = Im\{z(t)\} = Im\{\tilde{x}(t)\, e^{j2\pi f_0 t}\}$$

sulla base della quale, attraverso considerazioni analoghe alle precedenti, si giunge allo schema duale (che omettiamo).

Per determinare la relazione di passaggio da $x(t)$ alle due componenti dell'inviluppo complesso, osserviamo che, per definizione

$$\tilde{x}(t) = z(t)\, e^{-j2\pi f_0 t}$$

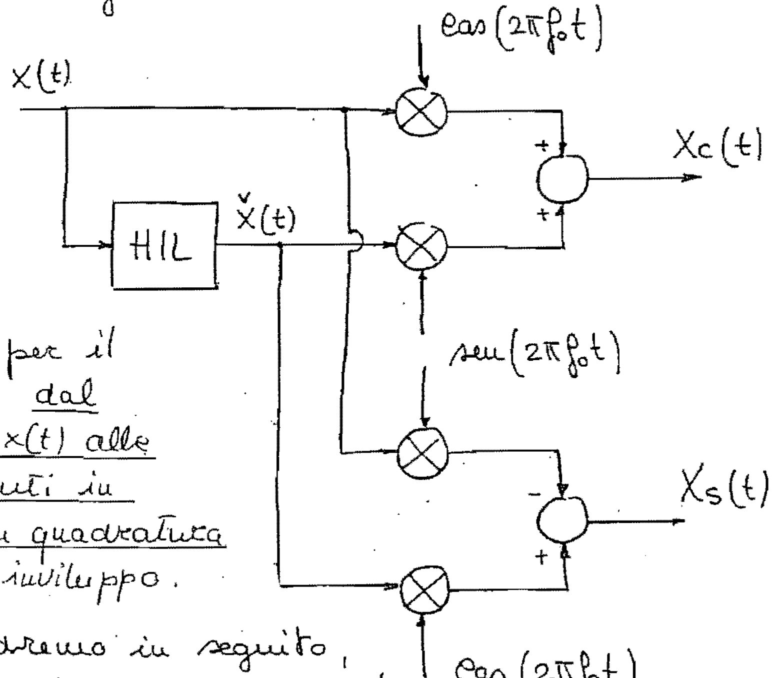
allora:

$$x_c(t) + j\,x_s(t) = \left[x(t) + j\check{x}(t)\right]\left[\cos(2\pi f_0 t) - j\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)\right] =$$

uguagliando parte reale e parte immaginaria si ottiene

$$\boxed{\begin{aligned} x_c(t) &= x(t)\cos(2\pi f_0 t) + \check{x}(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) \\ x_s(t) &= \check{x}(t)\cos(2\pi f_0 t) - x(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} (1.3) \\ (1.4) \end{aligned}$$

Sulla base di queste due relazioni si può tracciare lo schema seguente:



Schema per il passaggio dal segnale $x(t)$ alle componenti in fase e in quadratura del suo inviluppo.

Come vedremo in seguito, per la categoria di segnali di maggior interesse, questo schema può essere notevolmente semplificato.

Come noto dall'algebra, un numero complesso può essere scritto in forma polare. Anche l'inviluppo complesso allora diviene:

$$\tilde{x}(t) = x_c(t) + j\, x_s(t) = \rho(t)\, e^{j\Phi(t)} \qquad (1.5)$$

nella quale

$$\begin{cases} \rho(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)} & (1.6) \\ \Phi(t) = \operatorname{arctg} \dfrac{x_s(t)}{x_c(t)} & (1.7) \end{cases}$$

detti rispettivamente MODULO e FASE dell'inviluppo complesso.

Proprietà dell'INVILUPPO COMPLESSO $\tilde{x}(t)$

Si considerino due frequenze f_0 e f_1 e siano $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{x}'(t)$ gli inviluppi complessi di $x(t)$ ad esse relative:

$$\tilde{x}(t) = z(t)\, e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$\tilde{x}'(t) = z(t)\, e^{-j2\pi f_1 t}$$

In entrambe i casi il modulo vale

$$\underline{\rho(t) = \rho'(t) = |z(t)|}$$

quindi il modulo non dipende dalla frequenza.

ANALISI IN FREQUENZA DELL'INVILUPPO COMPLESSO

Per definizione

$$\boxed{\tilde{x}(t) = x_c(t) + j\, x_s(t)}$$

nella quale $x_c(t)$ e $x_s(t)$ sono segnali reali; in quanto tali, gli spettri $X_c(f)$ e $X_s(f)$ sono a simmetria Hermitiana e lo spettro $jX_s(f)$ è a simmetria Anti Hermitiana. Come già detto:

$$\boxed{\tilde{X}(f) = X_c(f) + j\, X_s(f)}$$

Nota: Un segnale complesso $S(t)$, con spettro $S(f)$, può sempre essere scritto come somma di un segnale a simmetria Hermitiana e uno a simmetria AntiHermitiana

Per quanto detto:

$$S(f) = S_H(f) + S_A(f)$$

$$S_H(f) = S_H^*(-f)$$

$$S_A(f) = - S^*(-f)$$

inoltre ...

$$S_H(f) = \frac{S(f) + S^*(-f)}{2}$$

$$S_A(f) = \frac{S(f) - S^*(-f)}{2}$$

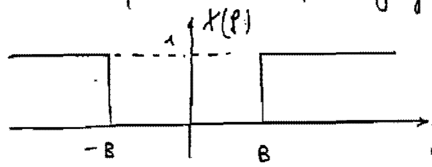
Per la nota appena vista

$$\boxed{X_c(f) = \frac{\tilde{X}(f) + \tilde{X}^*(-f)}{2} \qquad (1.8)}$$

$$\boxed{X_s(f) = \frac{\tilde{X}(f) - \tilde{X}^*(-f)}{2j} \qquad (1.9)}$$

<u>Esempio</u>

Si consideri un segnale $x(t)$ con spettro $X(f)$ di figura. Determinare $x(t)$ in funzione delle due componenti in fase e in quadratura.



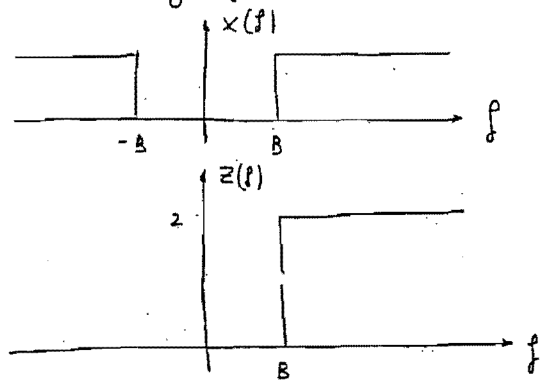
Sappiamo che:

$$x(t) = x_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_s(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)$$

ponendo $\underline{f_0 = B}$, per via grafica:

$$z(t) = x(t) + j\check{x}(t)$$

$$Z(f) = X(f) + j\check{X}(f)$$



nato $x(f)$

$$\check{X}(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)\,X(f) = \begin{cases} -jX(f) & f \geq 0 \\ jX(f) & f < 0 \end{cases}$$

allora

$$Z(f) = X(f) + j\check{X}(f) = \begin{cases} 2X(f) & f \geq B \\ 0 & f < B \end{cases}$$

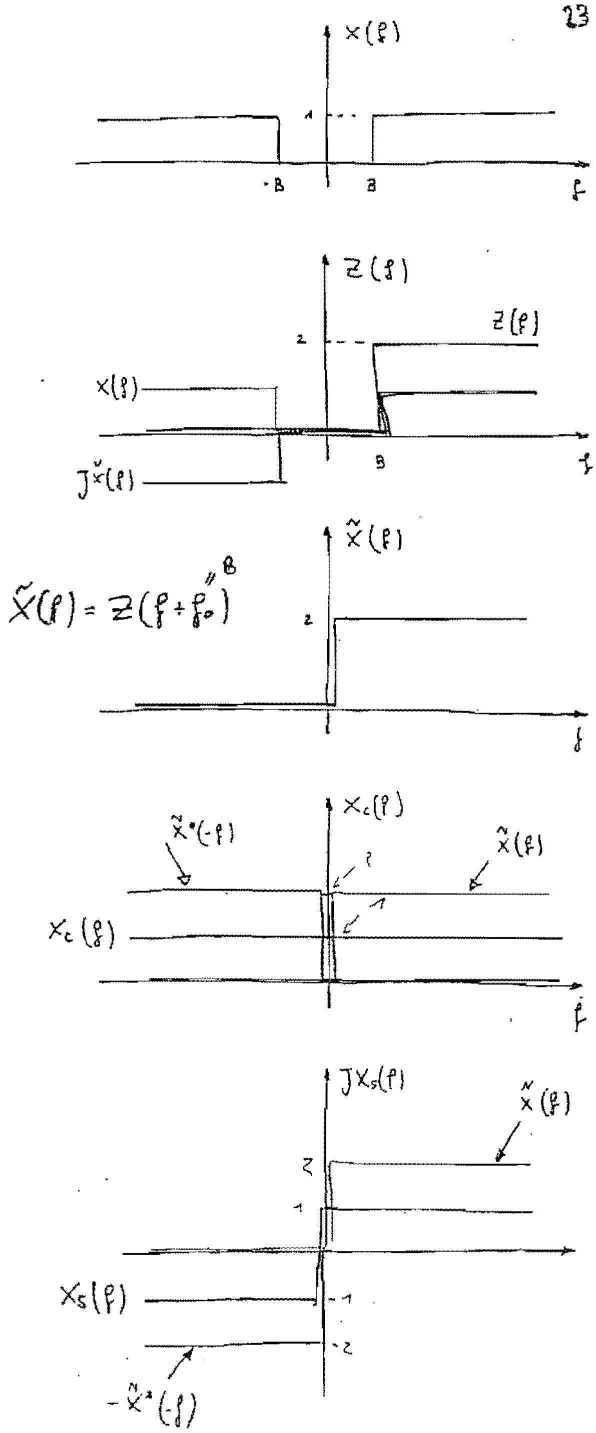
per le due relazioni (1.8) e (1.9)

$$X_c(f) = \frac{\tilde{X}(f) + \tilde{X}^*(-f)}{2}$$

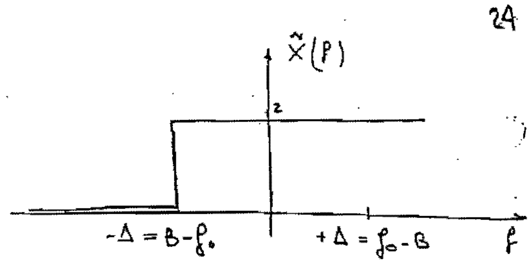
$$X_s(f) = \frac{\tilde{X}(f) - \tilde{X}^*(-f)}{2j}$$

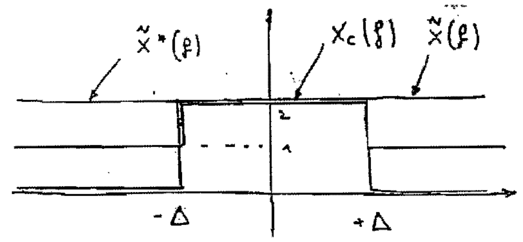
con

$$\tilde{X}(f) = Z(f+f_0)$$



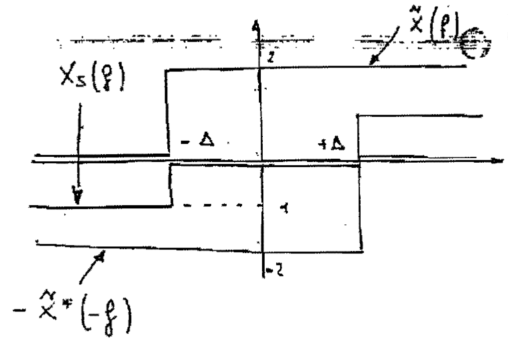
Supponiamo di prendere $f_0 > B$ così da aumentare la traslazione, con la quale si ottiene $\tilde{x}(f)$. In sostanza $X(f)$ e $Z(f)$ rimangono invariati, ciò che cambia è l'inviluppo complesso $\tilde{x}(f)$.





$$X_c(f) = 1 + rect\left(\frac{f}{2\Delta}\right)$$

$$\mathfrak{F}^{-1} \Longrightarrow x_c(t) = \delta(t) + sinc(2\Delta t)$$

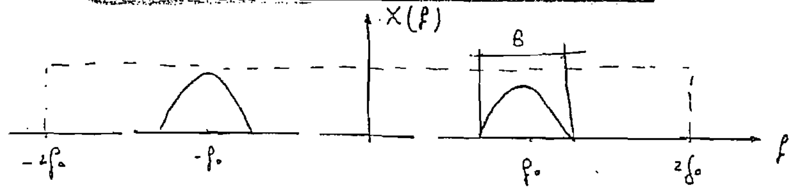


SEGNALI IN BANDA PASSANTE (o Segnali Passa Banda)

Nelle comunicazioni elettriche, analogiche o numeriche che siano, i segnali hanno una BANDA limitata B, centrata in f_0; nella maggior parte dei casi f_0 è piuttosto elevata ($f_0 >> B/2$).

Segnale PASSA BANDA: Si definisce Segnale Passa Banda $x(t)$ intorno alla frequenza f_0, se il suo spettro $X(f)$ si estende al più tra $-2f_0$ e $2f_0$ ovvero:

$$\left| X(f) \neq 0 \iff -2f_0 < f < 2f_0 \right.$$



- Proprietà dei Segnali Passa banda:

1. Se $x(t)$ è un segnale Passa Banda, il suo inviluppo complesso, la componente in fase e quella in quadratura sono segnali PASSA BASSO di Banda f_0.

Dimostrazione

Per come è definito $z(t)$ è passa basso di banda $2f_0$, infatti:

$$Z(f) \neq 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq f \leq 2f_0$$

Siccome $\underset{\text{complesso}}{\text{inviluppo}}$ $\tilde{X}(f) = Z(f + f_0)$

avremo

$$\tilde{X}(f) = Z(f + f_0) \neq 0 \quad \text{per} \quad -f_0 \leq f \leq f_0$$

questo significa che

$$X_c(f) = \frac{\tilde{X}(f) + \tilde{X}^*(-f)}{2} \neq 0$$

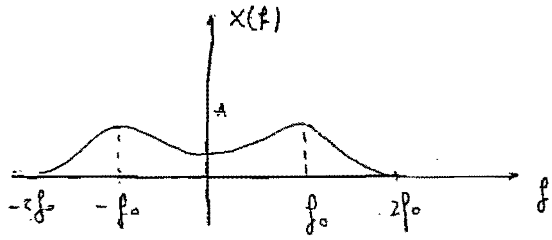
$$X_s(f) = \frac{\tilde{X}(f) - \tilde{X}^*(-f)}{j} \neq 0 \qquad \text{per} \quad -f_0 \leq f \leq f_0$$

ovvero sono passa basso di banda f_0.

Introducendo l'inviluppo complesso $\tilde{x}(t)$ del segnale reale $x(t)$, si ha la possibilità di lavorare con segnali passa basso anziché passa banda in f_0. In sostanza si dice che $\tilde{x}(t)$, o analogamente $x_c(t)$ e $x_s(t)$, sono l'EQUIVALENTE IN BANDA BASE DEL SEGNALE PASSA BANDA $x(t)$. Il vantaggio è evidente se pensiamo che f_0 in genere è la frequenza della portante del segnale $x(t)$ ottenuto modulando un qualsiasi segnale da trasmettere. In quanto tale, f_0 può essere molto elevata (nelle comunicazioni satellitari f_0 arriva anche a 90 GHz), perciò può essere davvero problematico progettare dispositivi che lavorino a tale frequenza.

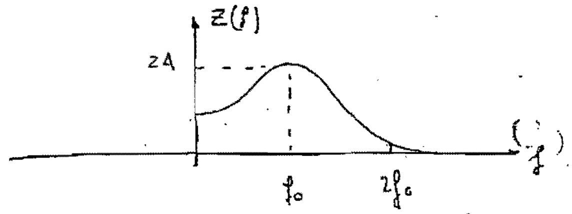
Consideriamo allora un ~~segnale Passa Banda centrato~~ in f_0; sappiamo che se $X(f)$ è lo spettro di $x(t)$,

$$Z(f) = 2X(f)u(f)$$



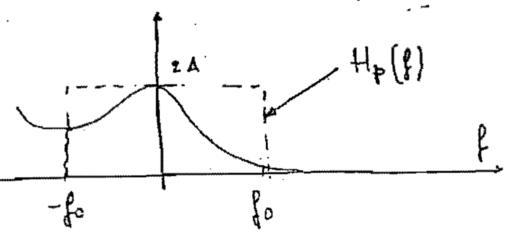
inoltre

$$\tilde{X}(f) = Z(f+f_0) = $$
$$= 2X(f+f_0)u(f+f_0)$$



È evidente che per ottenere $\tilde{X}(f)$, basterebbe filtrare con $H_p(f)$ rettangolare di banda $2f_0$

$$\tilde{X}(f) = 2X(f+f_0)H_p(f)$$



con

$$H_p(f) = \begin{cases} 1 & -f_0 \le f \le f_0 \\ 0 & |f| > f_0 \end{cases}$$

Nel dominio del tempo

$$\tilde{x}(t) = 2\left[x(t)e^{-j2\pi f_0 t}\right] \otimes h_p(t) =$$
$$= 2\left[x(t)\cos(2\pi f_0 t) - jx(t)\sin(2\pi f_0 t)\right] \otimes h_p(t) =$$

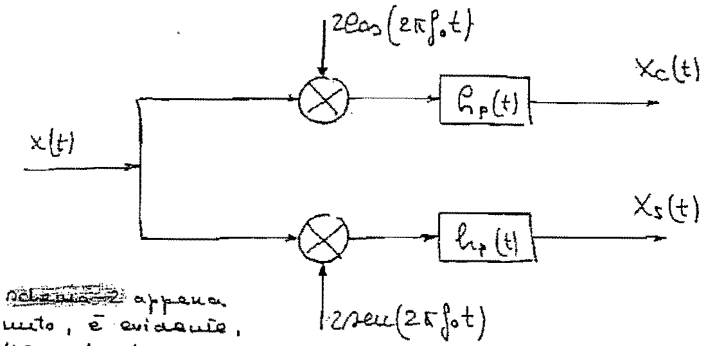
Tuttavia $\tilde{X}(t) = X_c(t) + j X_s(t)$

uguagliando parte reale e parte immaginaria

$$X_c(t) + j X_s(t) = 2\left[x(t)\cos(2\pi f_0 t)\right] \otimes h_p(t) - j2\left[x(t)\operatorname{sen}(2\pi f_0 t)\right] \otimes h_p(t)$$

$$\begin{cases} X_c(t) = 2x(t)\cos(2\pi f_0 t) \otimes h_p(t) & (1.10) \\ X_s(t) = -2x(t)\operatorname{sen}(2\pi f_0 t) \otimes h_p(t) & (1.11) \end{cases}$$

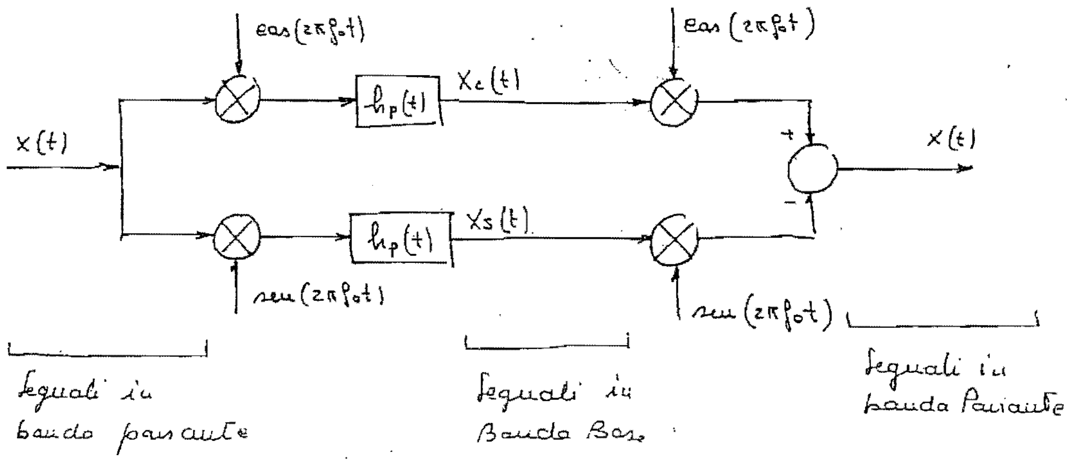
sulla base delle relazioni (1.10) e (1.11) appena scritte, perveniamo al seguente schema di passaggio:



Schema 2 per il passaggio dal segnale $x(t)$ alle due componenti in fase e in quadratura dell'inviluppo complesso.

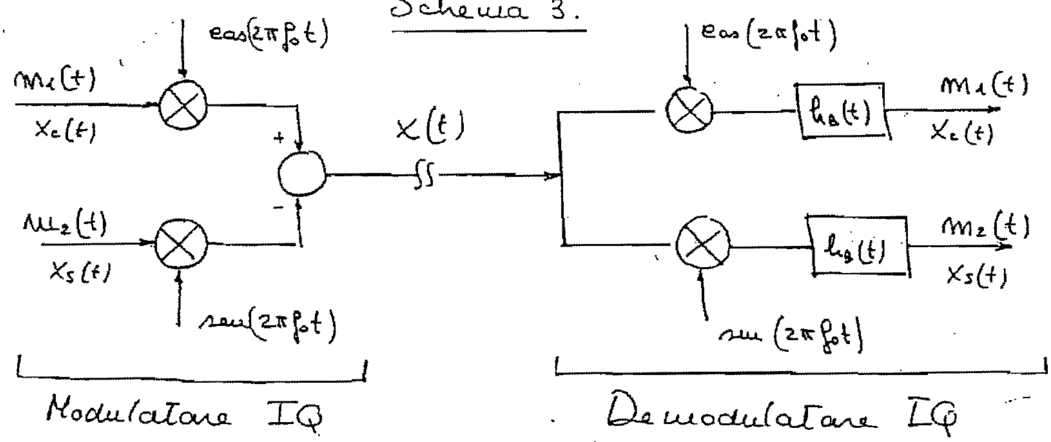
Lo ~~schema 2~~ appena ottenuto, è evidente, risulta notevolmente semplificato grazie alle proprietà dei segnali passa banda.

In generale allora si può tracciare uno schema per il passaggio da segnali in BANDA PASSANTE $x(t)$ a segnali in BANDA BASE $X_c(t)$ e $X_s(t)$ e ancora da segnali in BANDA BASE a segnali in BANDA PASSANTE, e viceversa: → Schema 2 ⇉ Schema 1 →



Una possibile applicazione dei due schemi (schema 1 e schema 2), può essere la seguente. Siano $m_1(t)$ e $m_2(t)$ due segnali, ad esempio due segnali video, in banda base. Per poter essere trasmessi, devono essere modulati (traslati ad una frequenza più elevata); allora si può pensare di modulare $m_1(t)$ ~~con una portante~~ e $m_2(t)$ con la stessa in quadratura; in questo modo si ottiene tramite lo schema 1, un unico segnale in banda passante $x(t)$, che può essere trasmesso.
Il ricevitore può allora essere realizzato con lo schema 2 che estrae da $x(t)$ le due componenti dell'inviluppo complesso, che in sostanza sono $m_1(t)$ e $m_2(t)$.
Questa operazione è detta MODULAZIONE IQ e permette di trasmettere due segnali m_1 e m_2 sovrapposti nel tempo e in frequenza. Lo schema realizzativo è il seguente:

Schema 3.

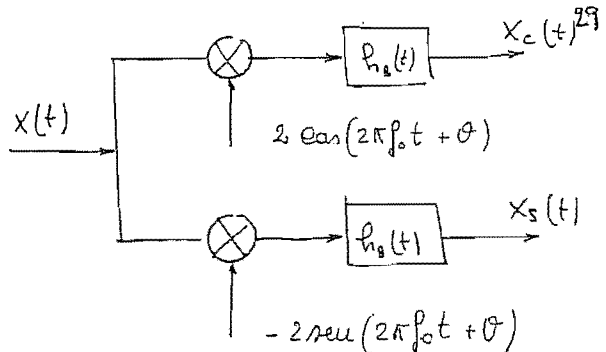


Il problema della MODULAZIONE IQ, risiede nel fatto che, un eventuale ritardo o anticipo di fase nel demodulatore IQ, compromette la possibilità di ricostruire i segnali in banda base di origine.

Dallo schema 3, sappiamo che il segnale trasmesso include i segnali $m_1(t)$ e $m_2(t)$ è nella forma

$$x(t) = m_1(t)\cos(2\pi f_0 t) - m_2(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

Supponiamo che il demodulatore sia del tipo di figura.
~~Dimostriamo~~ Dimostriamo con le formule trigonometriche che affinché $X_c(t) = m_1(t)$ e $X_s(t) = m_2(t)$, deve essere $\theta = 0$.



$\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t + \theta) = \cos(\cancel{2\omega_0 t} + \theta) + \cos(\theta)$

$\text{sen}(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t + \theta) = \text{sen}(\cancel{2\omega_0 t} + \theta) - \text{sen}(\theta)$

$$X_c(t) = 2\,x(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta) =$$
$$= 2m_1(t)\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t + \theta) - 2m_2(t)\,\text{sen}(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 t + \theta) =$$
$$= 2m_1(t)\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t + \theta) - 2m_2(t)\,\text{sen}(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t + \theta)$$

i termini in $2\omega_0$ vengono eliminati dal filtraggio h_B perché escono dalla banda, quindi rimane: con le formule di addizione di seno e coseno:

$$2x(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta) = m_1(t)\cos\theta - m_2(t)\,\text{sen}(\theta)$$

Volendo
$$X_c(t) = m_1(t)$$
$$m_1(t)\cos(\theta) - m_2(t)\,\text{sen}(\theta) = m_1(t)$$
si deduce
$$\theta = 0$$

Analogo discorso si può fare per ottenere $X_s(t) = m_2(t)$.
Per poter <u>demodulare correttamente il segnale ricevuto gli oscillatori di portante non devono essere sfasati tra loro</u>. Al più se lo sfasamento fosse $\theta = \pi/2$, otterremmo $X_c(t) = m_2(t)$ e $X_s(t) = m_1(t)$.
In molti casi per non incorrere in eventuali sfasamenti, la <u>portante</u> viene <u>dedotta</u> direttamente dal segnale ricevuto, tramite un dispositivo detto <u>ESTRATTORE DI SINCRONISMO</u>. <u>In presenza di rumore</u>

molto spesso ci si deve accontentare di ottenere la stessa frequenza, ma un leggero sfasamento.
È evidente che se θ è molto piccolo

$$\cos\theta \cong 1 \quad e \quad \operatorname{sen}\theta \cong 0$$

quindi

$$m_1(t)\cos\theta - m_2(t)\operatorname{sen}\theta \cong m_1(t)$$

Supponiamo di avere $X(t)$ e $h(t)$ passa banda; allora il segnale ottenuto come uscita del blocco $h(t)$ in risposta ad $x(t)$

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) \qquad Y(f) = X(f)H(f)$$

è a sua volta un segnale passa banda; in realtà, affinché anche $y(t)$ sia passa banda, basterebbe che almeno uno dei due fra $x(t)$ e $h(t)$ fosse passa banda, infatti, per $|f| > 2f_0$, uno dei due (spettri) sarebbe nullo e così $y(t)$.
Ricaviamo l'inviluppo complesso $\tilde{y}(t)$ da quelli di $x(t)$ e $h(t)$.
Sappiamo che:

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}(f) &= 2Y(f+f_0)H_p(f) = \\
&= 2\left[\tfrac{1}{2}\cdot 2\, X(f+f_0)H(f+f_0)H_p(f)H_p(f)\right] = \\
&= \tfrac{1}{2}\left[2\,X(f+f_0)H_p(f)\cdot 2\,H(f+f_0)H_p(f)\right] = \\
&= \tfrac{1}{2}\tilde{H}(f)\tilde{X}(f) \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

allora:

$$(1.13) \qquad \tilde{y}(t) = \tfrac{1}{2}\tilde{h}(t) \otimes \tilde{x}(t) \qquad \tilde{x}(t) \rightarrow \boxed{\tfrac{1}{2}\tilde{h}(t)} \rightarrow \tilde{y}(t)$$

Scriviamo $\tilde{y}(t)$ esplicitando le due componenti

$$\tilde{y}(t) = y_c(t) + j\,y_s(t)$$

inoltre:

$$\tilde{y}(t) = \tfrac{1}{2}\tilde{x}(t) \otimes \tilde{h}(t) =$$

$$= \left[x_c(t) + j\,x_s(t)\right] \otimes \frac{1}{2}\left[h_c(t) + j\,h_s(t)\right] =$$

$$= \left[x_c(t) \otimes \frac{1}{2} h_c(t) - x_s(t) \otimes \frac{1}{2} h_s(t)\right] +$$

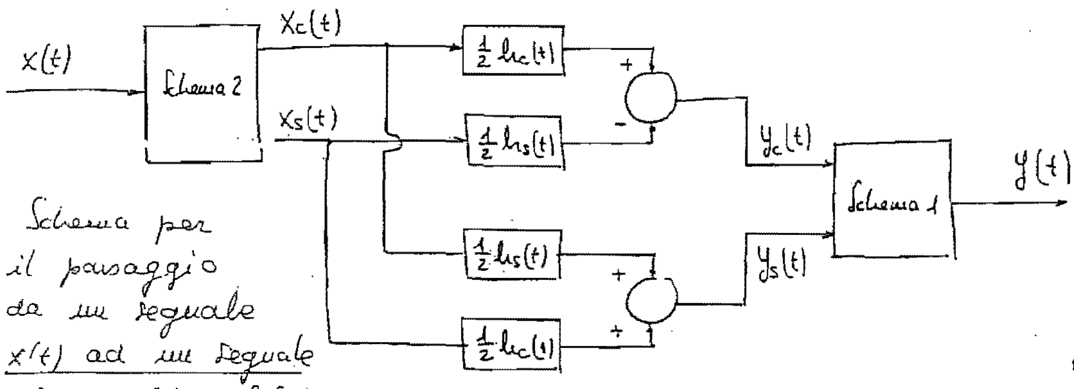
$$+ j \left[x_s(t) \otimes \frac{1}{2} h_c(t) + x_c(t) \otimes \frac{1}{2} h_s(t)\right]$$

uguagliando parte reale e parte immaginaria

$$y_c(t) = x_c(t) \otimes \frac{1}{2} h_c(t) - x_s(t) \otimes \frac{1}{2} h_s(t) \qquad (1.1)$$

$$y_s(t) = x_s(t) \otimes \frac{1}{2} h_c(t) + x_c(t) \otimes \frac{1}{2} h_s(t) \qquad (1.1)$$

Sulla base delle relazioni appena scritte si perviene al seguente schema:

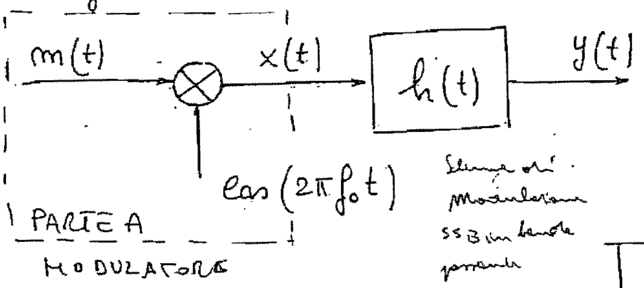


Schema per il passaggio da un segnale $x(t)$ ad un segnale $y(t) = x(t) \otimes h(t)$

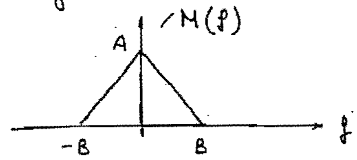
Girare!

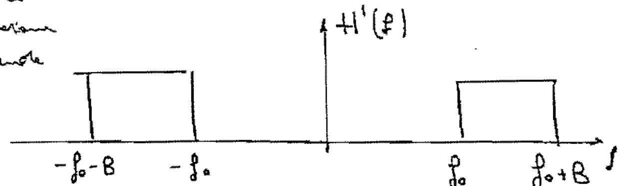
MODULAZIONE SSB

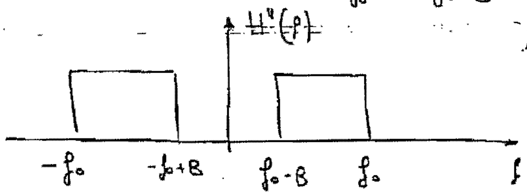
Si consideri un segnale $m(t)$ passa banda, con banda B
e un filtro $h(t)$ passa banda.
Inseriamo un modulatore e analizziamo il funzionamento dello schema seguente:



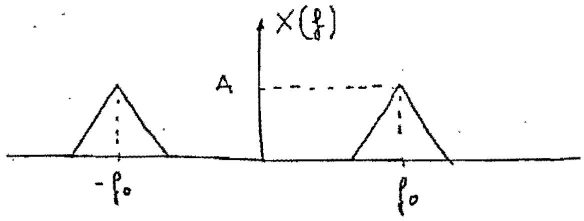
Schema di modulazione SSB in banda passante





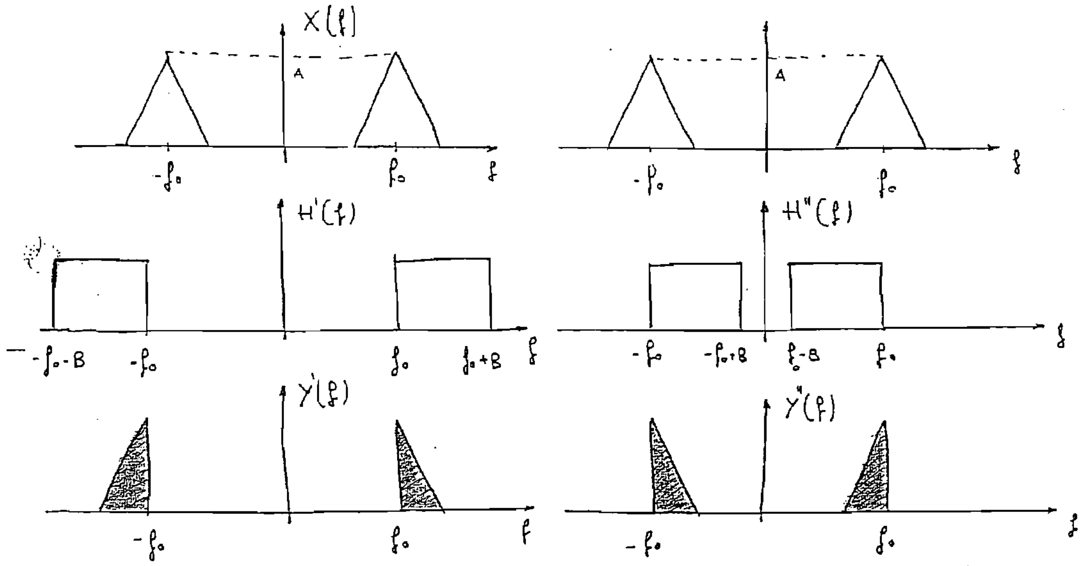


La parte A del sistema sopra riportato, non è che un MODULATORE. Siccome lo spettro di $m(t)$, $M(f)$, è a Simmetria Hermittiana conoscendo la parte delle frequenze positive o quella delle frequenze negative, è noto l'intero spettro $M(f)$. La parte di spettro di un segnale passa basso delle frequenze positive è detta BANDA LATERALE SUPERIORE (Upper Band UB), mentre quella per frequenze negative è detta BANDA LATERALE INFERIORE (Lower Band LB).
La parte A del dispositivo, non fa che traslare lo spettro di $m(t)$, centrandolo in f_0 e $-f_0$; esso si dice MODULATORE A DOPPIA BANDA LATERALE (DSB)



Nota la simmetria dello spettro di $X(f)$, si può pensare di limitare l'occupazione frequenziale, eliminando una delle due bande laterali. In questo modo si ottiene un segnale A SINGOLA BANDA LATERALE. Questa operazione può essere

eseguita con il filtro $h(t)$, detto FILTRO SSB.
L' eliminazione della banda laterale, può essere di due tipi: se si impiega il filtro $h'(t)$, si elimina la banda laterale inferiore ottenendo un segnale SSB - UB (Single Side Band - Upper Band); se si usa il filtro $h''(t)$, si elimina la banda superiore, ottenendo un segnale SSB - LB (Single Side Band - Lower Band).



MODULAZIONE SSB-UB MODULAZIONE SSB-LB

Con il dispositivo impiegato, detto MODULATORE SSB si passa da un segnale in banda base ad uno in banda passante e poi si esegue il filtraggio. pag. 32 $\neq$
Vediamo gli equivalenti in banda base di $x(t)$ e $y(t)$

$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

allora, per la (1.13)

$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) \otimes \frac{1}{2} \tilde{h}(t)$$

osserviamo che $\tilde{x}(t) = m(t)$, ovvero

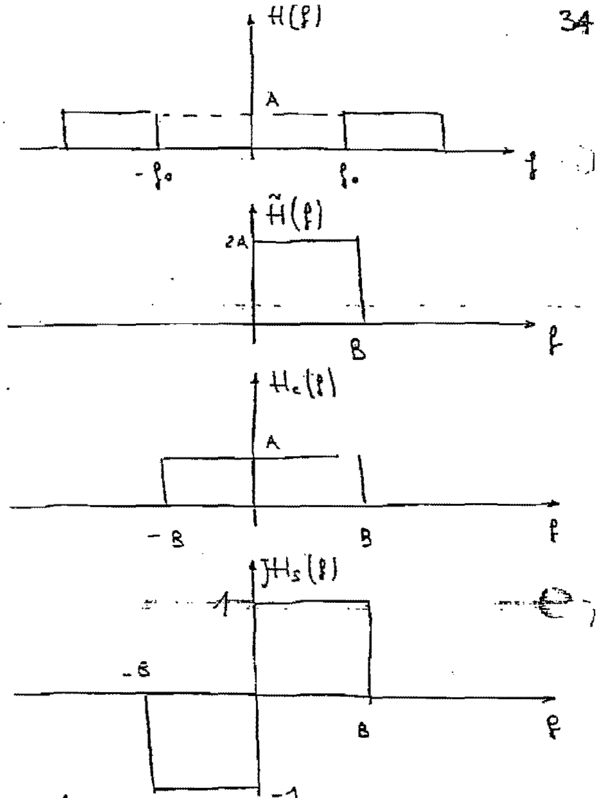
$$x_c(t) = m(t)$$
$$x_s(t) = 0$$

Analogamente

nato $H(f)$, attraverso le relazioni seguenti, si determinano le due componenti:

$$H_c(f) = \frac{\tilde{H}(f) + \tilde{H}^*(-f)}{2}$$

$$H_s(f) = \frac{\tilde{H}(f) - \tilde{H}^*(-f)}{2j}$$



Siccome $H_c(f)$ deve filtrare $X_c(f)$ che è già di banda B, si può assumere:

$$H_c(f) = 1$$

Analogamente

$$H_s(f) = \begin{cases} 1 & f \geq 0 \\ -1 & f < 0 \end{cases} = -j\,\text{segno}(f)$$

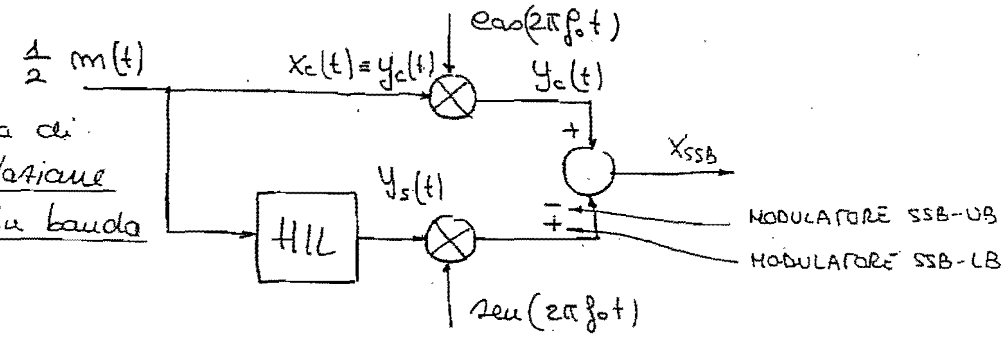
Si deduce che $\tilde{H}(f)$ = FILTRO DI HILBERT

ponendo $x_s(t) = 0$ nelle (1.14) e (1.15) si ottiene:

$$y_c(t) = x_c(t) \otimes \frac{1}{2} h_c(t)$$

$$y_s(t) = x_c(t) \otimes \frac{1}{2} h_s(t)$$

che si traduce nel seguente schema



Schema di modulazione SSB, in banda base.

La differenza tra quest'ultimo dispositivo e quello iniziale consiste nel fatto che l'ultimo esegue l'operazione di filtraggio direttamente sui segnali in banda base e poi esegue la traslazione.
Di fatto i due sono equivalenti.
Dallo schema appena tracciato, si può scrivere l'espressione di $y(t)$ in forma chiusa:

$$y(t) = \frac{m(t)}{2}\cos(2\pi f_0 t) - \frac{\check{m}(t)}{2}\sin(2\pi f_0 t) \quad \text{SSB-UB}$$

$$y(t) = \frac{m(t)}{2}\cos(2\pi f_0 t) + \frac{\check{m}(t)}{2}\sin(2\pi f_0 t) \quad \text{SSB-LB}$$

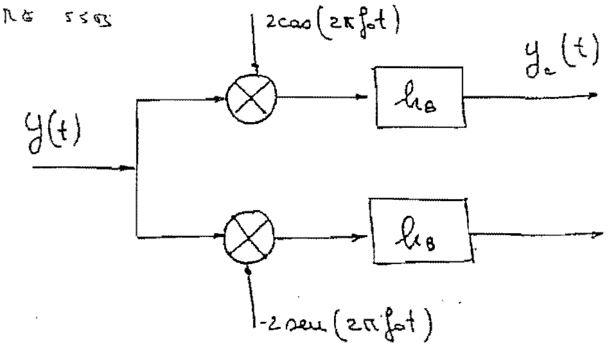
Dalle due espressioni si deduce che

$$\frac{m(t)}{2} = \text{componente in fase}$$

$$\frac{\check{m}(t)}{2} = \text{componente in quadratura}$$

allora $m(t)$ può essere ottenuto dal ramo superiore del dispositivo rappresentato nello schema 2.

DEMODULATORE SSB
X UB, LB



Questo è lo schema realizzativo del DEMODULATORE SSB e vale sia per UB che LB.

POTENZA ED ENERGIA DI SEGNALI REALI

Qualsiasi segnale $x(t)$, abbiamo visto, può essere scritto come somma di due componenti in fase e in quadratura. Se $x(t)$ è passa banda, $x_c(t)$ e $x_s(t)$ sono in banda base.

$$x(t) = x_c(t)\cos 2\pi f_0 t - x_s(t)\sin 2\pi f_0 t$$

$$\boxed{\begin{matrix} E<\infty \Rightarrow P=0 \\ P<\infty \Rightarrow E=\infty \end{matrix}}$$

Se $x(t)$ è ad ENERGIA FINITA

$$\boxed{E_x = \frac{1}{2}E_c + \frac{1}{2}E_s} \qquad (2.1)$$

Se $x(t)$ è a POTENZA FINITA

$$\boxed{P_x = \frac{1}{2}P_c + \frac{1}{2}P_s} \qquad (2.2)$$

Ricordiamo che se un segnale è a Energia finita allora è a Potenza media nulla; viceversa se è a potenza media finita allora è ad Energia infinita.

- Ricordiamo anche due importanti risultati

$$(2.3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)\, s_2^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(f)\, S_2^*(f)\, df \qquad \text{TEOREMA DI PARSEVAL}$$

$$(2.4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S_1(f)|^2 df \qquad \text{UGUAGLIANZA DI PARSEVAL}$$

- Dimostrazione (dalla (2.1), per la (2.2) si ha la dim. analoga)

Sappiamo che

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{\tilde{x}(t)\, e^{j2\pi f_0 t}\right\} =$$

proprietà dei numeri complessi

$$= \frac{1}{2}\tilde{x}(t)\, e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}\tilde{x}^*(t)\, e^{-j2\pi f_0 t}$$

allora dall'uguaglianza di Parseval:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}\tilde{x}^*(t)e^{-j2\pi f_0 t}\right]^2 dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^2(t)\, e^{j4\pi f_0 t} dt + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^{*2}(t)\, e^{-j4\pi f_0 t} dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{x}(t)|^2 dt =$$

Analizziamo i singoli integrali:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^2(t)\, e^{j4\pi f_0 t}\, dt = \qquad (A)$$

ponendo
$$\tilde{x}^2(t) = s_1(t) \quad e \quad e^{j4\pi f_0 t} = s_2(t)$$

e applicando il teorema di Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^2(t)\, e^{j4\pi f_0 t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\tilde{X}(f) \otimes \tilde{X}(f)\right] \cdot \delta\left(f+2f_0\right) df =$$

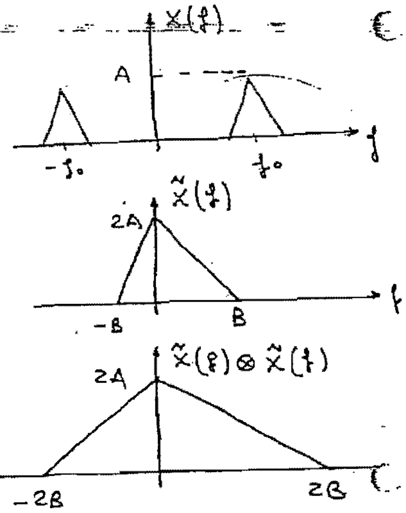
ricordando che essendo $\tilde{x}(t)$ in banda base

proprietà che deriva dalla teoria dei segnali $\left(\tilde{X}(f) \neq 0 \iff |f| < f_0\right) \Rightarrow \begin{cases} \tilde{X}(f) \otimes \tilde{X}(f) \neq 0 \\ \text{per } |f| < 2f_0 \end{cases}$

e ricordando che la moltiplicazione per un δ equivale alla traslazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\tilde{X}(f) \otimes \tilde{X}(f)\right] \delta\left(f+2f_0\right) df =$$

$$= \left[\tilde{X}(f) \otimes \tilde{X}(f)\right]\Big|_{f=2f_0} = 0$$



allora l'integrale (A) è nullo.
L'integrale (B)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^{*2}(t)\, e^{-j4\pi f_0 t}\, dt =$$

è anch'esso nullo perché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^{*2}(t)\, e^{-j4\pi f_0 t}\, dt = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}^2(t)\, e^{j4\pi f_0 t}\, dt\right]^* = 0$$

otteniamo allora che

$$\underline{E_x} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{x}(t)|^2\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[x_c^2(t) + x_s^2(t)\right] dt =$$

$$= \underline{\frac{1}{2} E_c + \frac{1}{2} E_s}$$

RAPPRESENTAZIONE IN BANDA BASE DI PROCESSI REALI

(Rappresentazione complessa di processi reali)

Si consideri un generico processo stocastico $N(t)$; ricordiamo che ad esso sono associate infinite "realizzazioni" che di fatto non sono altro che segnali determinati:

$$N(t) \longrightarrow m_1(t), m_2(t), \ldots, m_n(t)$$

TRASFORMATA DI HILBERT $\check{N}(t)$

La trasformata di Hilbert è definita esattamente come per i segnali reali:

$$\check{N}(t) = N(t) \otimes h(t) \quad \text{con } h(t) = \frac{1}{\pi t}$$

$$\check{N}(f) = N(f) H(f) \quad \text{con } H(f) = -j\,\text{sign}(f)$$

PROCESSO ANALITICO $Z(t)$

Si definisce processo analitico $Z(t)$ di $N(t)$, il processo complesso che ha per parte reale il processo $N(t)$ stesso e per parte immaginaria la trasformata di Hilbert $\check{N}(t)$ del processo di partenza.

$$\boxed{Z(t) = N(t) + j\check{N}(t)}$$

In sostanza il processo analitico è il processo che ha come realizzazioni i segnali analitici delle realizzazioni del processo di partenza:

$$\begin{cases} z_1(t) = m_1(t) + j\check{m}_1(t) \\ z_2(t) = m_2(t) + j\check{m}_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) = m_n(t) + j\check{m}_n(t) \end{cases}$$

INVILUPPO COMPLESSO $\tilde{N}(t)$ DEL PROCESSO $N(t)$ RISPETTO A f_0

Scelta una frequenza arbitraria f_0 si definisce inviluppo complesso $\tilde{N}(t)$ del processo $N(t)$ rispetto alla frequenza f_0 il processo ottenuto moltiplicando il processo analitico $Z(t)$ per l'esponenziale $\exp(-j2\pi f_0 t)$.

ovvero:

$$\begin{cases} \tilde{N}(t) = Z(t)\, e^{-j2\pi f_0 t} \\ \tilde{N}(f) = Z(f + f_0) \end{cases}$$

Anche in questo caso l'inviluppo complesso, può essere espresso come somma di una COMPONENTE IN FASE $N_c(t)$ e una COMPONENTE IN QUADRATURA $N_s(t)$:

$$\tilde{N}(t) = N_c(t) + j\, N_s(t)$$

Analogamente, l'inviluppo complesso di un processo, non è che il processo che ha per realizzazioni gli inviluppi complessi delle realizzazioni del processo $N(t)$ di partenza

$$\tilde{n}_1(t) = n_{c1}(t) + j\, n_{s1}(t)$$
$$\tilde{n}_2(t) = n_{c2}(t) + j\, n_{s2}(t)$$
$$\vdots$$
$$\tilde{n}_n(t) = n_{cn}(t) + j\, n_{sn}(t)$$

In generale ogni operazione definita per i segnali determinati, applicata ad un processo, equivale alla stessa applicata a ciascuna realizzazione.

Ogni schema visto per i segnali è da ritenersi valido per i processi, con le dovute considerazioni.

RICHIAMI SULLA STAZIONARIETA' DI UN PROCESSO

Un processo si dice STAZIONARIO IN SENSO STRETTO (SSS) se le sue statistiche non dipendono dall'origine dell'asse dei tempi; in sostanza se i processi

$$X(t) \text{ e } X(t+\varepsilon)$$

con ε arbitrario, hanno le stesse statistiche.

In sostanza tutte le statistiche di primo ordine η_x, σ_x^2, $E\{X^2\}$ non dipendono da t.
Fissato $t = \bar{t}$, tutte le variabili aleatorie estratte sono equidistribuite (uguale valor medio), uguale potenza media e uguale varianza.

Un processo si dice STAZIONARIO IN SENSO LATO (SSL) se la funzione valor medio è costante e la funzione di autocorrelazione non dipende da t_1 e t_2 ma solo dalla differenza τ: 41

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau) \qquad \tau = t_1 - t_2$$
$$\eta_X(t) = \eta_X = \text{costante}$$

IPOTESI SEMPLIFICATIVA

Nella pratica, i processi che descrivono fenomeni come ad esempio il "rumore", sono soggetti ad alcune ipotesi semplificative. In particolare supponiamo che il processo $N(t)$ sia stazionario in senso lato (SSL) a media nulla:

$$\boxed{E\{N(t)\} = \eta_N = 0}$$

con Autocorrelazione

$$\boxed{R_{NN}(\tau) = E\{N(t+\tau)N(t)\}}$$

Sotto queste ipotesi, si potrebbe dimostrare che l'inviluppo complesso del processo $\tilde{N}(t)$ è a sua volta stazionario in senso lato a valor medio nullo:

$$\boxed{E\{\tilde{N}(t)\} = 0}$$

con Autocorrelazione

$$\boxed{R_{\tilde{N}\tilde{N}}(\tau) = E\{\tilde{N}(t+\tau)\tilde{N}(t)\} = 2\tilde{R}_{NN}(\tau)}$$

$R_{NN}(\tau)$ è un segnale determinato;

PROCESSI IN BANDA PASSANTE (o Processi Passa Banda)

PROCESSO PASSA BANDA: Si definisce Processo Passa Banda $N(t)$, intorno ad una frequenza f_0, se la sua funzione di Autocorrelazione è un segnale determinato di tipo Passa Banda: Questo significa che la Densità spettrale di potenza $S_{NN}(f)$, che è l'equivalenza in frequenza dell' autocorrelazione è non nullo solo nell' intervallo che va da $-2f_0$ a $2f_0$.

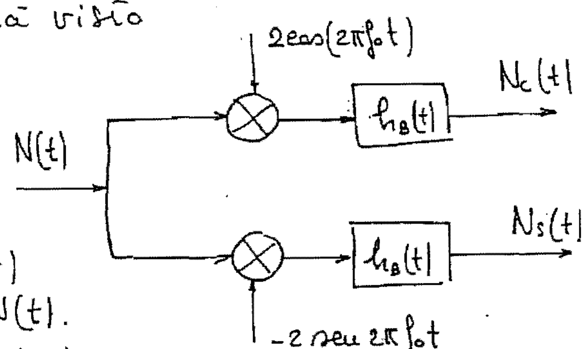
$$\boxed{S_{NN}(f) \neq 0 \iff |f| \leq 2f_0}$$

Proprietà dei processi Passa Banda:

Sia $N(t)$ un processo Passa Banda, ovvero tale che:

$$S_{NN}(f) \neq 0 \iff |f| < 2f_0$$

Mettere un processo in ingresso ad un sistema, significa trasformare, attraverso il sistema stesso, tutte le realizzazioni del processo. Per passare dal processo $N(t)$ alle componenti in fase e in quadratura $N_c(t)$ e $N_s(t)$ di $\tilde{N}(t)$, si utilizza lo stesso schema 2 impiegato per i segnali determinati; analogamente per l'operazione inversa si utilizza lo schema 1 già visto



Determiniamo ora le statistiche di $N_c(t)$ e $N_s(t)$ da quelle di $N(t)$. Supposto $N(t)$, come prima, SSL, a valor medio nullo e passa banda, possiamo dire, come accadeva per i segnali determinati, che processi $N_c(t)$ e $N_s(t)$ sono Stazionari SSL e a valor medio nullo.

$$\mathbb{E}\{N_c(t)\} = \mathbb{E}\{N_s(t)\} = 0$$

Inoltre la funzione di autocorrelazione è la stessa per le due componenti:

$$R_{cc}(\tau) = \mathbb{E}\{N_c(t+\tau)N_c(t)\} = \mathbb{E}\{N_s(t+\tau)N_s(t)\} = R_{ss}(\tau)$$

In particolare $R_{cc}(\tau)$ e $R_{ss}(\tau)$ sono la COMPONENTE IN FASE di $R_{NN}(\tau)$.

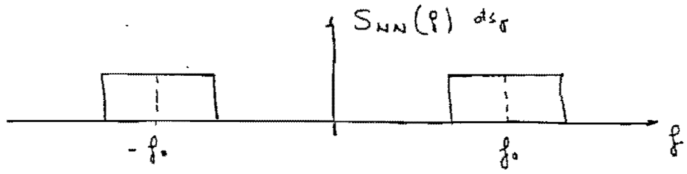
Per quanto riguarda la funzione di crosscorrelazione di $N_c(t)$ e $N_s(t)$, avremo:

$$R_{SC}(\tau) = \mathbb{E}\left\{ N_s(t+\tau)\, N_c(t) \right\}$$

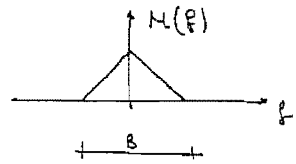
che, in particolare è la COMPONENTE IN QUADRATURA di $R_{NN}(\tau)$.

Esempio

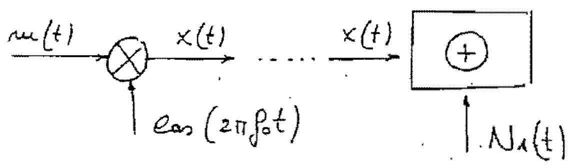
Si consideri il processo $N_1(t)$ ottenuto dal filtraggio passa banda dell'AWGN; ricordiamo che l'AWGN ha densità spettrale di potenza costante e pari a $N_0/2$, quindi filtrando con banda centrata in f_0, otteniamo che la densità spet. di pot. di $N_1(t)$ risulta:



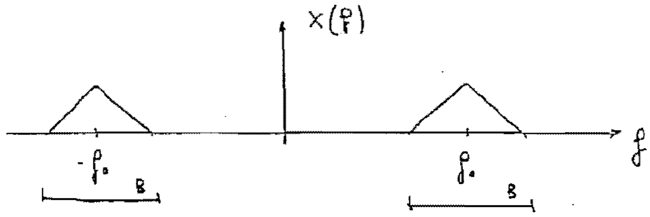
Questo di fatto è il rumore che si sovrappone al segnale utile. Supponiamo di avere un segnale $m(t)$ di banda $B/2$ come segue



Supponiamo di modulare $m(t)$ in f_0 come segue



In frequenza:



In ricezione $X(f)$ deve essere filtrato in modo da eliminare quanto più rumore possibile, lasciando inalterato il segnale X.

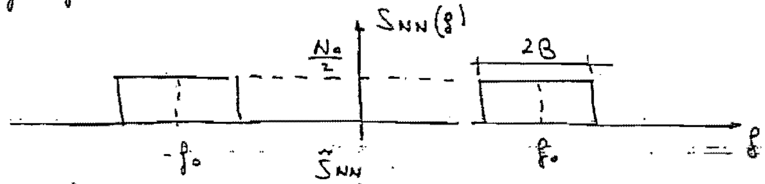
Calcoliamo le statistiche del rumore, in particolare, Autocorrelazione e Crosscorrelazione delle componenti in fase e in quadratura:

$$R_{ss}(N) = R_{cc}(N) \quad e \quad R_{sc}(N)$$

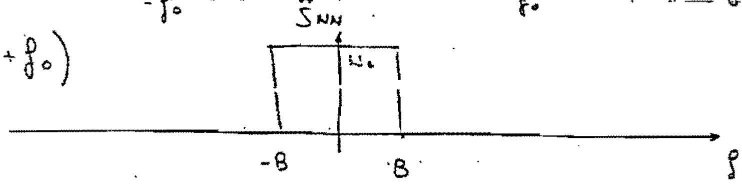
che in frequenza corrispondono a

$$S_{cc}(f) = S_{ss}(f) \quad e \quad S_{sc}(f)$$

Scelta f_0 la frequenza rispetto alla quale calcolare $\tilde{S}$, avremo graficamente:

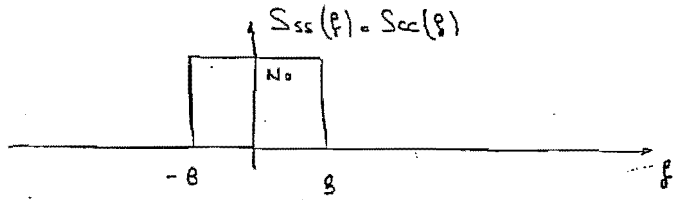


$$\tilde{S}_{NN}(f) = Z(f+f_0)$$



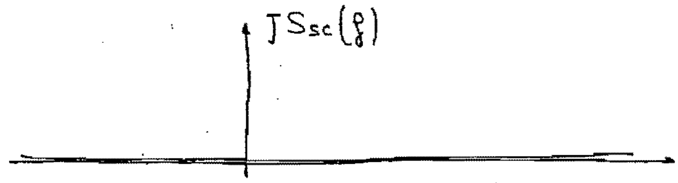
Come per i segnali determinati

$$S_{cc}(f) = S_{ss}(f) = \frac{S_{NN}(f) + S^*_{NN}(-f)}{2} \qquad S^*_{NN}(-f) = S_{NN}(-f)$$



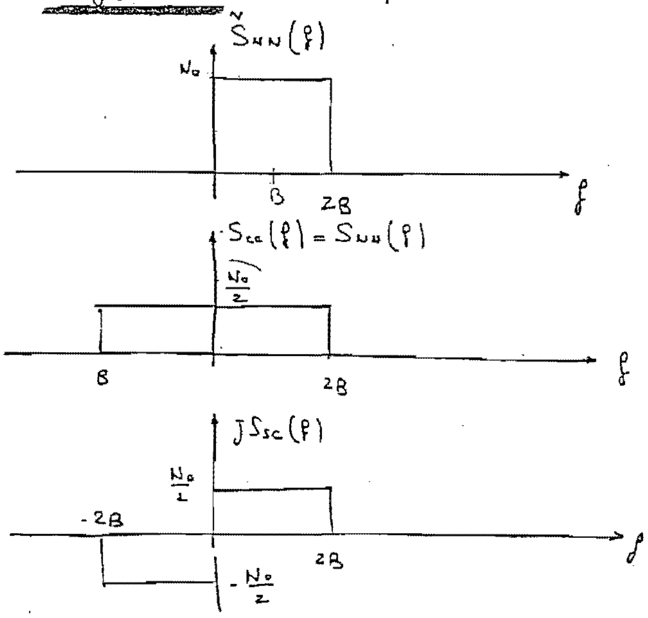
Analogamente:

$$S_{sc}(f) = \frac{S_{NN}(f) - S^*_{NN}(-f)}{2J} \qquad S^*_{NN}(-f) = S_{NN}(-f)$$



Come noto i segnali N_c e N_s sono PASSA BASSO di banda 2B. Siccome $S_{sc}(f) = 0$, i due processi

N_c e N_s sono INCORRELATI; inoltre sono anche a media nulla, perchè AWGN è tale, sono
. Essendo $N(t)$ gaussiano anche N_c e N_s lo sono indipendenti
Calcoliamo l'inviluppo complesso del processo $\tilde{S}_{NN}(f)$ rispetto alla frequenza $f_1 = B$: come prima



Come si vede dai grafici N_c e N_s non sono più incorrelati.

Modulare un segnale, significa imporre la variazione di una grandezza in base all'andamento del segnale da trasmettere stesso.

Si consideri un segnale $x(t)$ di Banda B (passa basso) (tipicamente da zero a qualche MHz); si supponga $x(t)$ a media nulla; questa ipotesi è ragionevole, perché le informazioni sono contenute nella variazione del segnale rispetto al valor medio, indipendentemente dal valore che esso assume. Un'altra ipotesi è sul modulo del segnale, poniamo:

$$\boxed{|x(t)| \leq 1}$$

se così non fosse basterebbe amplificare o attenuare il segnale senza compromettere il contenuto informativo; si suppone allora di normalizzare l'ampiezza del segnale. Questa ipotesi ha conseguenze sulla potenza del segnale, infatti

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\, dt \leq 1 \quad \text{perché} \quad |x(t)| \leq 1$$

Esempio

Si consideri un segnale $x(t)$ e un filtro $h(t)$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

nota E_x, l'energia di y risulta:

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t)\, dt =$$

per l'uguaglianza di Parseval

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, |H(f)|^2 df =$$

prendendo come filtro un filtro di Hilbert

$$|H(f)| = 1$$

allora

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = E_x$$

— * —

Riassumendo le ipotesi, consideriamo segnali $x(t)$ caratterizzati da:

A.	Banda B passa basso	(4.1.1)
B.	$x(t)$ a media nulla	(4.1.2)
C.	Ampiezza normalizzata $\lvert x(t)\rvert \leq 1$	(4.1.3)

I motivi per cui si applica una modulazione, prima di trasmettere un segnale, sono i seguenti:

1. ADATTAMENTO DEL SEGNALE AL CANALE
   Un qualsiasi canale trasmissivo, predilige un segnale all'interno di una banda specificata.

2. MULTIPLAZIONE
   Per far coesistere più segnali su di uno stesso canale, vengono assegnati intervalli di frequenza a ciascun utente; con la modulazione ci si porta in questi intervalli prefissati.

3. IMMUNITA' AI DISTURBI
   Come vedremo modulando un segnale, si rende lo stesso più immune ai disturbi; spesso questo accade a spese di un maggiore ingombro frequenziale.

4. REALIZZABILITA DELL' HARDWARE
   Può accadere che un determinato dispositivo lavori in maniera ottimale in un certo intervallo di frequenza, allora modulando, ci si propone di lavorare esattamente in quella zona.

In generale una modulazione è caratterizzata da:

A. <u>SEGNALE MODULANTE $x(t)$</u> che è di fatto il segnale <u>da trasmettere</u>.

B. <u>SEGNALE PORTANTE $p(t)$</u> cosinusoidale nella forma

$$p(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

A seconda del tipo di modulazione, si varia l'ampiezza della portante (AM), la frequenza della portante (FM) o la fase della portante (PM)

MODULAZIONI LINEARI

MODULAZIONE DI AMPIEZZA (AM)

In generale un segnale MODULATO IN AMPIEZZA (AM) ha un'espressione del tipo:

$$\boxed{x_{AM}(t) = A_0 \left[1 + \mu x(t)\right] \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)} \quad (4.2)$$

nella quale l'ampiezza è funzione del tempo, che dipende da $x(t)$:

$$A(t) = A_0 \left[1 + \mu x(t)\right] = A_0 + \mu A_0 x(t) \quad (4.3)$$

l'ampiezza del segnale modulato in ampiezza $A(t)$ è proporzionale tramite μ a $x(t)$. La costante μ è <u>detta</u> <u>INDICE DI MODULAZIONE DI AMPIEZZA</u>.

Il segnale <u>$x_{AM}(t)$</u> è un segnale <u>passa banda, scomponibile in componente in fase e componente in quadratura</u>:

$$(4.4) \quad x_{AM}(t) = x_c(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - x_s(t) \sin(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

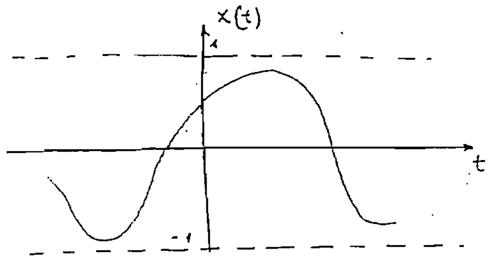
Osservazione: la scrittura (4.4) discende da una definizione più generale di inviluppo complesso:

$$\tilde{x}_{AM}(t) = z_{AM}(t)\, e^{-j(2\pi f_0 t + \theta_0)}$$

Dalla (4.2) e dalla (4.4) si evince che in un segnale modulato in ampiezza $x_{AM}(t)$ la <u>componente in fase</u> è <u>$A(t)$</u>, come nella (4.3), mentre quella in <u>quadratura è nulla</u>.

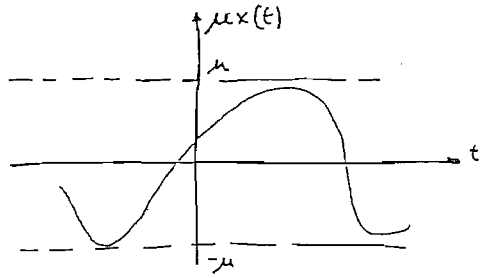
ANDAMENTO TEMPORALE

Consideriamo un generico segnale $x(t)$, sotto le ipotesi (4.1.1), (4.1.2) e (4.1.3) come in figura.



Moltiplichiamo $x(t)$ per l'indice μ e distinguiamo due casi:

1. $\mu \leq 1$
2. $\mu > 1$



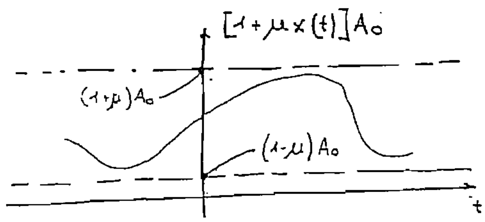
allora il risultato di

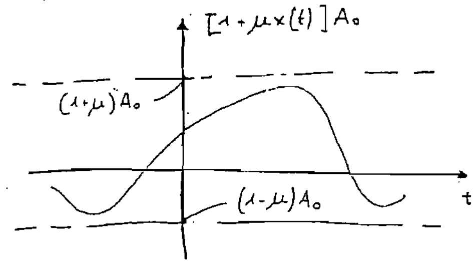
$$\left[1 + \mu x(t)\right] A_0$$

$x(t)$ normalizzato $|x(t)| \leq 1$

sarà, nei due casi differenti,

- Se $\mu \leq 1$ il segnale $[1+\mu x(t)]A_0$ è compreso fra $(1-\mu)A_0$ e $(1+\mu)A_0$
- Se $\mu > 1$ il segnale $[1+\mu x(t)]A_0$ è compreso fra $(1-\mu)A_0$ e $(1+\mu)A_0$ con $(1-\mu) < 0$



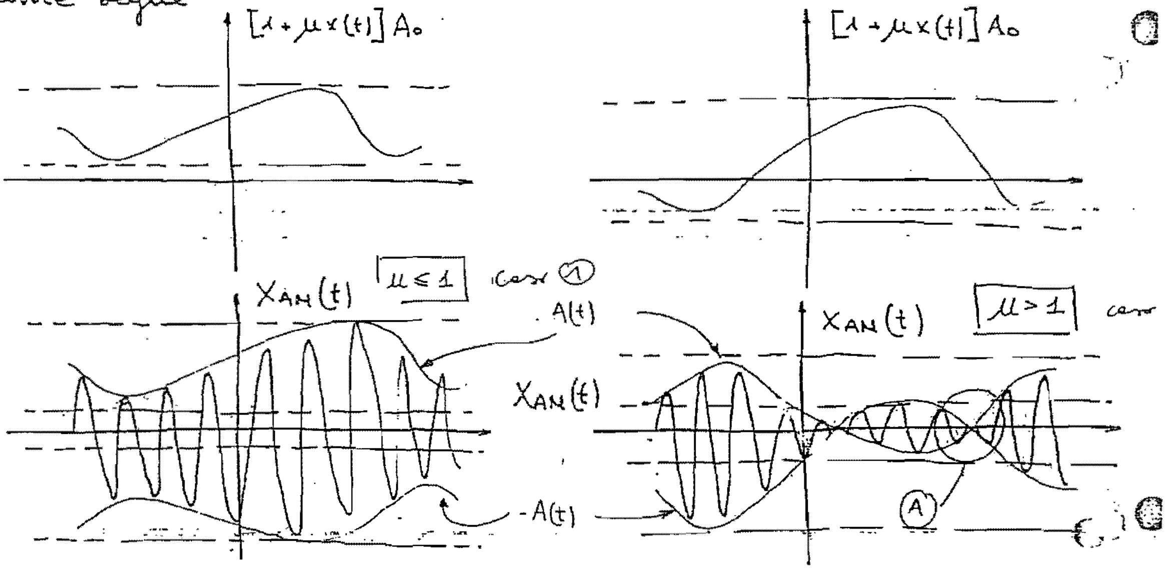


Osserviamo che nel caso della modulazione di ampiezza occorre imporre la condizione:

$$f_0 \gg B \qquad (4.5)$$

Avere f_0 elevata significa imporre una oscillazione molto fitta; avere B piccola, significa avere una lenta variazione dell'ampiezza

Nei due casi il segnale modulato $x_{AM}(t)$ risulterà come segue



Nel caso 2. nell'istante in cui l'ampiezza cambia di segno Ⓐ è come imporre uno sfasamento di π nel coseno della portante; questi istanti sono detti ISTANTI DI INVERSIONE DI FASE.

Porre l'attenzione su questo aspetto è essenziale, perché nei dispositivi per le modulazioni ha molta importanza il RIVELATORE DI INVILUPPO, ovvero, un circuito elettronico che segue la variazione dell'ampiezza nel tempo; in sostanza fornisce il modulo di $A(t)$. Nel caso 1., cioè quando $\mu \leq 1$,

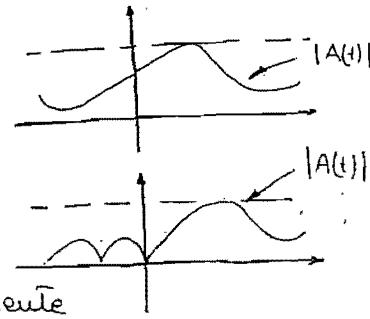
$$|A(t)| = A(t) = [1+\mu x(t)]A_0$$

$$x_{AM}(t) \longrightarrow \boxed{\text{Rivelatore di inviluppo}} \longrightarrow |A(t)|$$

è evidente che per risalire a $x(t)$, basta eliminare il valor medio (traslare il segnale).

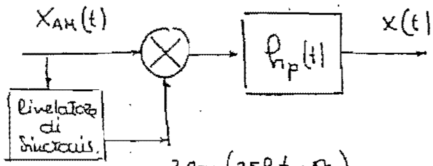
Nel caso 2., cioè quando $\mu > 1$,

$$|A(t)| \neq A(t)$$



quindi per risalire a $x(t)$ occorre un dispositivo più complesso; siccome $A(t)$ non è che la componente in fase di $x(t)$, basta applicare un dispositivo basato

sullo schema 1 di pag 19, detto DEMODULATORE SINCRONO.
Per avere in fase di ricezione le stessa frequenza f_0 e la stessa fase θ_0, viene inserito un blocco che ha il compito di sincronizzarsi, detto RIVELATORE DI SINCRONISMO.



Un dispositivo basato sul demodulatore sincrono risulta più costoso e difficile da realizzare, pertanto, a seconda delle applicazioni si deve scegliere se impostare $\mu \leq 1$ o $\mu > 1$.

ANALISI IN POTENZA DEL SEGNALE AM

Come noto

$$P_{AM} = \frac{1}{2} P_c + \frac{1}{2} P_s$$

siccome $x_s(t)$ è nulla anche la potenza P_s è tale.

$$P_{AM} = \frac{1}{2} P_c \qquad (4.6)$$

applicando la definizione di potenza

$$P_c = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T A_0^2 \left[1 + \mu x(t)\right]^2 dt =$$

perchè $x(t)$ è a media nulla

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left[A_0^2 T + A_0^2 \mu^2 \int_T x^2(t)\, dt + \cancel{2A_0^2 \mu \int_T x(t)\, dt} \right] =$$

siccome $x(t)$ è a media nulla (annulliamo l'ultimo integ.):

$$P_c = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left[A_0^2 T + A_0^2 \mu^2 \int_T x^2(t)\, dt \right] = A_0^2 + A_0^2 \mu^2 P_x \qquad (4.7)$$

quindi:

$$\boxed{P_{AM} = \frac{1}{2} P_c = \overset{①}{\frac{A_0^2}{2}} + \overset{②}{\frac{A_0^2}{2} \mu^2 P_x}} \qquad (4.8)$$

Osserviamo dalla (4.8) che nella modulazione AM, la parte ① è potenza spesa per trasmettere la portante, mentre la parte ② è potenza associata al segnale vero e proprio (portante modulata).

ANALISI SPETTRALE DEL SEGNALE AM

Come già ricavato:

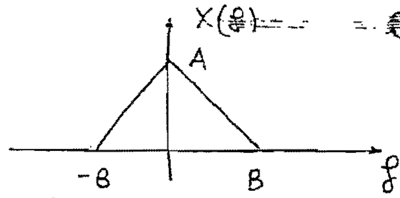
$$x_{AM}(t) = A_0\left[1+\mu\, x(t)\right]\cos\left(2\pi f_0 t + \theta_0\right) =$$

$$= A_0 \cos\left(2\pi f_0 t + \theta_0\right) + \mu A_0\, x(t) \cos\left(2\pi f_0 t + \theta_0\right)$$

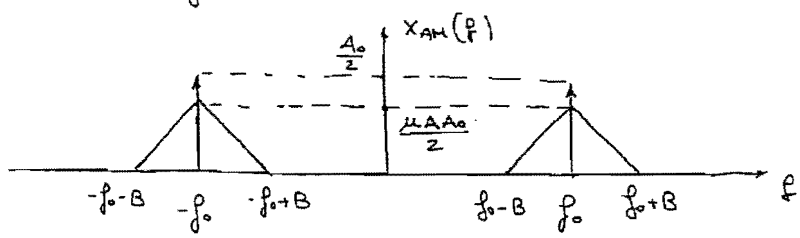
In frequenza

$$\boxed{X_{AM}(f) = \frac{A_0}{2} e^{J\theta_0}\,\delta(f-f_0) + \frac{A_0}{2} e^{J\theta_0}\,\delta(f+f_0) + \frac{\mu A_0}{2} e^{J\theta_0} X(f+f_0) + \frac{\mu A_0}{2} e^{J\theta_0} X(f-f_0)} \quad (4.9)$$

Noto il generico spettro di $x(t)$ di banda B (ricordiamo che la banda si misura sulle sole frequenze positive).



Lo spettro del segnale modulato x_{AM} risulta il seguente:



esso è composto dallo spettro del segnale originale, cambiato in ampiezza di $\mu A_0/2$, traslato alla frequenza della portante f_0; in più ad esso si sovrappone in f_0 lo spettro della portante stessa (che è un δ perché la portante è sinusoidale). Siccome $f_0 >> B$, la banda del segnale AM risulta

$$\boxed{B_{AM} = 2B} \quad (4.10)$$

CONSIDERAZIONI SULLA MODULAZIONI AM

Come già accennato la tecnica di demodulazione, dipende fortemente dalla scelta del coefficiente di modulazione μ. Se $\mu \leq 1$ per il recupero del segnale basta un semplice rivelatore di inviluppo (realizzabile anche con soli componenti passivi). Se $\mu > 1$, è necessario un demodulatore sincrono che di fatto comporta diversi accorgimenti.

Ci sono, tuttavia, altri aspetti che suggeriscono alcune modifiche. Dalla espressione (4.8), si evince che una parte sostanziale della potenza è spesa per trasmettere la portante; essa però non è associata a nessuna informazione il che significa un certo spreco di energia.

MODULAZIONE AM DSB-SC (Double Side Band - Suppressed Carrier).

Per quanto appena detto, si può pensare di non trasmettere la portante; in sostanza l'espressione del segnale modulato diviene

$$\boxed{X_{DSB-SC}(t) = \mu A_0 x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)} \quad (4.11)$$

l'analisi condotta in precedenza, ci dice che in questo caso la potenza risulta

$$\boxed{P_{DSB-SC} = A_0^2 \mu^2 \frac{P_x}{2}} \quad (4.12)$$

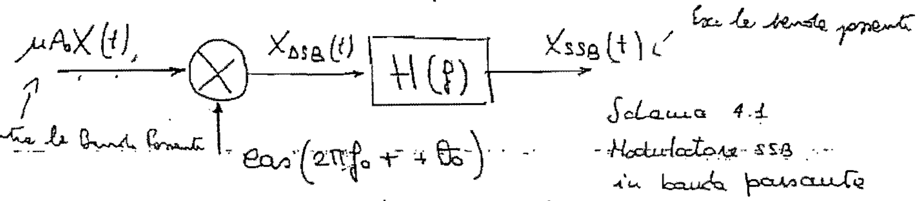
(potenza modulata)

ed è tutta associata all'informazione.

Lo spettro di un segnale DSB-SC è identico a quello di un segnale AM, senza però i δ associati alla portante in $+f_0$ e in $-f_0$.

MODULAZIONE SSB-SC (Single Side Band - Suppressed Carrier)

I segnali reali di nostro interesse hanno simmetria Hermitiana ($X(f) = X(-f)$); per questo motivo, si può pensare di limitare l'ingombro frequenziale, eliminando la parte nota una volta nota la simmetria. Se consideriamo come prima un generico spettro, possiamo modulare in ampiezza sopprimendo la portante ciò che otteniamo sono due repliche dello spettro originale, in $+f_0$ e in $-f_0$. A questo punto si filtra eliminando una delle parti ricostruibile per simmetria. Se $H(f)$ è il generico filtro passa banda si ha.

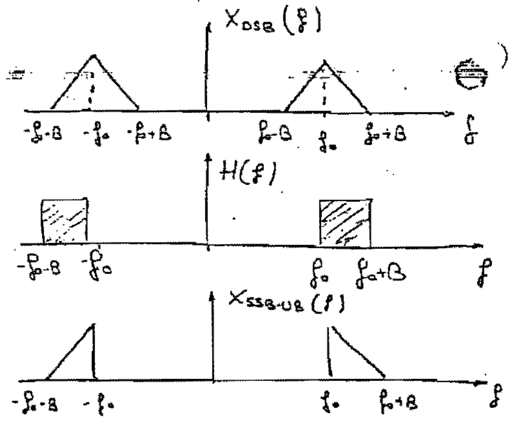


Schema 4.1
- Modulatore SSB in banda passante

Esistono però due possibilità, in base alla scelta del filtro $H(f)$.

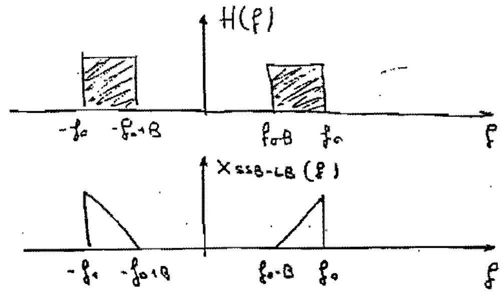
1. Modulazione AM SSB - UB (Upper Band)

   Il filtro ha una banda passante che va da f_0 a f_0+B; allora viene eliminata la banda laterale inferiore



2. Modulazione AM SSB - LB (Lower-Band)

   Il filtro ha una banda passante che va da f_0-B a f_0; allora viene eliminata la banda laterale superiore.



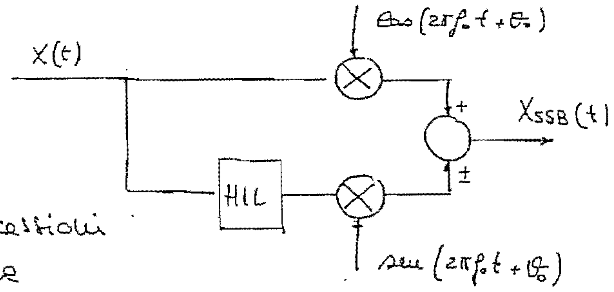
Come noto dalla trattazione di pag 34 e 35, l'espressione di un segnale SSB risulta

$$X_{SSB-UB}(t) = \frac{X(t)}{2}\cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - \frac{\check{x}(t)}{2}\operatorname{sen}(2\pi f_0 t + \theta_0) \quad (4.13)$$

$$X_{SSB-LB}(t) = \frac{X(t)}{2}\cos(2\pi f_0 t + \theta_0) + \frac{\check{x}}{2}(t)\operatorname{sen}(2\pi f_0 t + \theta_0) \quad (4.14)$$

Un segnale SSB, può essere ottenuto mediante filtraggio in banda passante come nello schema 4.1, oppure mediante filtraggio in banda base secondo lo schema 4.2 (vedi pag 34, 35).

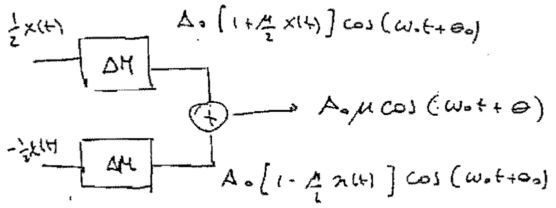
Schema 4.2
modulatore SSB
in banda base



Eseguendo l'analisi in potenza sulle espressioni (4.13) e (4.14) si deduce

$$\boxed{P_{SSB} = \frac{\mu^2 A_0^2}{2}\left(\frac{P_x}{4} + \frac{P_x}{4}\right) = \frac{\mu^2 A_0^2}{4} P_x} \qquad (4.15)$$

MODULATORE BILANCIATO DSB



i cos devono avere stessa fase e stessa ampiezza.

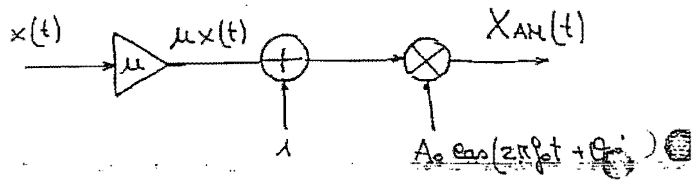
MODULATORE AM

La relazione che esprime formalmente un segnale modulato in ampiezza è la seguente:

$$x_{AM}(t) = A_0\left[1 + \mu x(t)\right]\cos\left(2\pi f_0 t + \theta_0\right)$$

essa suggerisce la possibilità di ottenere questa modulazione mediante amplificatori, sommatori e moltiplicatori, secondo lo schema seguente:

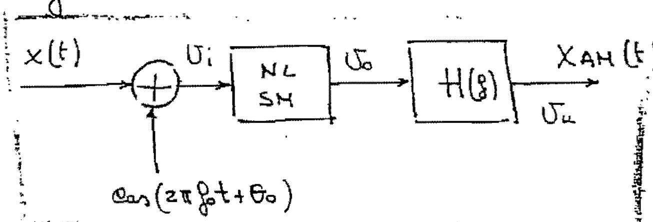
Schema 4.3. Modulatore AM



Il problema dal punto di vista realizzativo sta nel blocco moltiplicatore (MIXER).

Lo schema più frequentemente impiegato per la modulazione AM è il seguente:

Schema 4.4. Modulatore AM



Il blocco NLSM è un elemento non lineare senza memoria che realizza la funzione

$$v_o = a_1 v_i + a_2 v_i^2$$

Dimostriamo la possibilità di ottenere $x_{AM}(t)$:

$$v_o(t) = a_1\left[x(t) + \cos(\omega_0 t + \theta_0)\right] + a_2\left[x(t) + \cos(\omega_0 t + \theta_0)\right]^2 =$$

$$= a_1 x(t) + a_1\cos(\omega_0 t + \theta_0) + a_2 x^2(t) + a_2\cos^2(\omega_0 t + \theta_0) + 2a_2 x(t)\cos(\omega_0 t + \theta_0) =$$

$$= a_1 x(t) + a_1\cos(\omega_0 t + \theta_0) + a_2 x^2(t) + \frac{a_2}{2} + \frac{a_2}{2}\cos(2\omega_0 t + 2\theta_0) +$$

$$+ 2a_2 x(t)\cos(\omega_0 t + \theta_0) =$$

Dimensionando opportunamente il filtro passa banda $H(f)$ si eliminano la continua e le armoniche a frequenza doppia quindi rimane:

$$\underline{v_u(t)} = \cancel{a_1 x(t)} + \underline{a_1\cos(\omega_0 t + \theta_0)} + \cancel{a_2 x^2(t)} + \underline{2a_2 x(t)\cos(\omega_0 t + \theta_0)} =$$

$$= \underline{a_1\left(1 + \frac{2a_2}{a_1}x(t)\right)\cos(\omega_0 t + \theta_0)} \qquad (4.16.1)$$

ponendo $a_1 = A_0$ e $a_2 = \mu A_0/2$ (4.16.2)

si ottiene:

$$v_u = X_{AM}$$

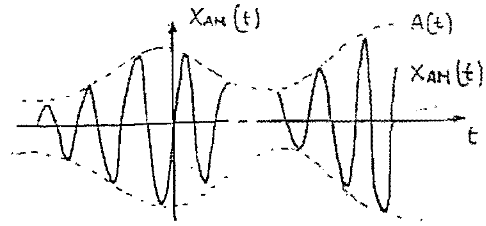
come sopra definito.

DEMODULATORE AM

Come già detto, a seconda del coefficiente di modulazione, esiste la possibilità di ricostruire il segnale originale. Se $\mu > 1$ è necessario il demodulatore sincrono che, per altro, è adatto anche se $\mu \leq 1$. In questo caso specifico però basta il rivelatore di inviluppo.

RIVELATORE DI INVILUPPO

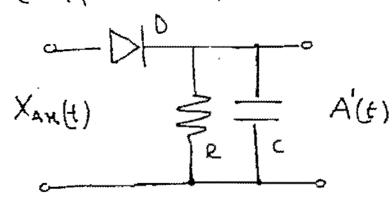
Se il coefficiente μ è minore o uguale a 1, supponendo un generico andamento del segnale da trasmettere e il conseguente andamento del segnale modulato, possiamo ottenere l'andamento di $A(t)$ attraverso un dispositivo passivo composto da diodo resistenza e capacità detto Rivelatore di inviluppo. Ricordiamo che $A(t)$ è un segnale proporzionale a $x(t)$ traslato, quindi sufficiente per risalire al segnale tx..



Requisito fondamentale è la condizione secondo la quale il segnale da trasmettere vari molto più lentamente del segnale portante, ovvero:

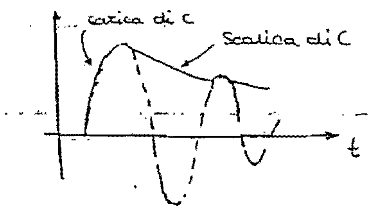
$$f_0 >> B$$

Schema 5.1 Rivelatore di inviluppo (supponiamo D ideale)

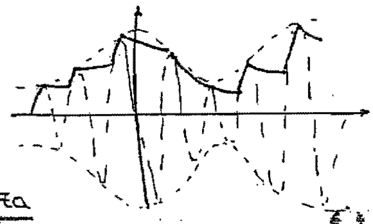


Di fatto il funzionamento del rivelatore si basa sulla carica e sulla scarica del condensatore.

Nella fase di carica C è alimentato tramite il diodo siccome R_d è pressoché nulla, la costante di tempo di carica è zero: questo significa che la tensione su C segue esattamente quella in ingresso.

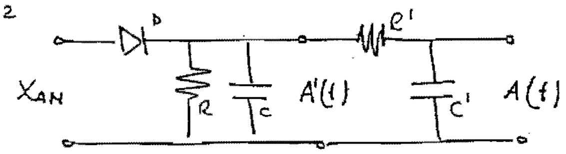


Quando $X_{AM}(t)$ scende sotto la tensione appena memorizzata su C, il diodo si interdice e il condensatore inizia il transitorio di scarica su R. In questo caso la costante di tempo è RC (vedremo in seguito come deve essere dimensionata).



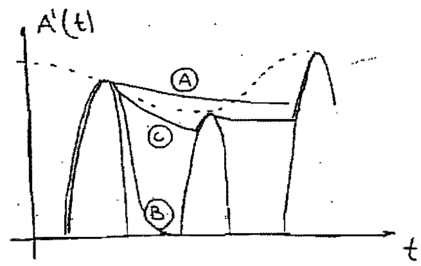
In sostanza si verifica una oscillazione su $A'(t)$ che ha frequenza molto più elevata rispetto a $A(t)$, detta RIPPLE; per eliminare questo fenomeno basta inserire un filtro passa basso (ad esempio uno squadra RC) per ottenere esattamente $A(t)$:

Schema 5.2



Considerazioni sulla costante di tempo di scarica RC

Se il transitorio di scarica è troppo lento rispetto alle variazioni di $A(t)$, la tensione di uscita del rivelatore potrebbe non essere in grado di seguire variazioni troppo brusche di $A(t)$ Ⓐ; in sostanza la durata del transitorio deve sicuramente essere inferiore rispetto al "periodo" di $A(t)$: se B è la banda di $x(t)$,



$$\frac{1}{RC} >> B \qquad (5.1)$$

D'altra parte, se il transitorio di scarica è troppo , cioè se RC è troppo piccolo, il condensatare non segue più l'andamento di $A(t)$ Ⓑ ; in altri termini il transitorio deve durare sicuramente di più c' l "periodo" della portante, ovvero se f_0 è la frequenza della portante:

$$\frac{1}{RC} << f_0 \qquad (5.2)$$

In conclusione R e C devono essere dimensionati in modo che:

$$\boxed{B << \frac{1}{RC} << f_0 \qquad (5.3)}$$

Osservazione: Consideriamo un generico segnale $x_H(t)$ passa banda e osserviamo cosa succede se applicato ad un rivelatore di inviluppo.

$$x_H(t) = x_c(t)\cos(\omega_0 t + \theta_0) - x_s(t)\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \theta_0)$$

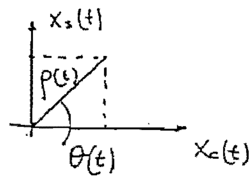
l'inviluppo complesso

$$\begin{bmatrix} x_c(t) = \rho(t)\cos\theta(t) \\ x_s(t) = \rho(t)\,\mathrm{sen}\,\theta(t) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}_H(t) = x_c(t) + j\,x_s(t) = \rho(t)\,e^{j\theta(t)}$$

$$\rho(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}$$

$$\theta(t) = \mathrm{arctg}\,\frac{x_s(t)}{x_c(t)}$$



possiamo riscrivere

$$x_H(t) = \rho(t)\cos\theta(t)\cos(\omega_0 t + \theta_0) -$$
$$- \rho(t)\,\mathrm{sen}\,\theta(t)\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \theta_0) =$$
$$= \rho(t)\cos\left[\omega_0 t + \theta_0 + \theta(t)\right]$$

Un segnale di questo tipo ha frequenza variabile per la presenza di $\theta(t)$. Il rivelatore d'inviluppo determina $\rho(t)$ indipend. dalle variazioni di frequenza. Ricordiamo che $\rho(t)$ è il modulo dell'inviluppo complesso, e questo è anche il motivo del nome.

$$x_H(t) \longrightarrow \boxed{\text{Rivelatore Inviluppo}} \longrightarrow \rho(t)$$

PROBLEMI DI DEMODULAZIONE

Vediamo come può essere realizzata la demodulazione nei vari tipi di modulazione di ampiezza.

A. Segnale AM : l'espressione risulta

$$X_{AM}(t) = A(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

in particolare

$$X_c(t) = A(t) = \text{comp. in fase}$$
$$X_s(t) = 0 = \text{comp. in quadratura}$$
$$\rho(t) = |A(t)|$$
$$A(t) = A_0 + \mu A_0 x(t)$$

$A(t)$ è proporzionale a $x(t)$. Come noto per recuperare $A(t)$ e quindi $x(t)$ si può impiegare il DEMOD. SINCRONO. inoltre se $\mu \leq 1$ si può impiegare il RIVEL DI INVILUPPO, se $\mu > 1$ invece no.

B. Segnale DSB : l' espressione risulta

$$X_{DSB}(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

in particolare

$$X_c(t) = X(t) = \text{comp. in fase}$$
$$X_s(t) = 0 = \text{comp. in quadratura}$$
$$\rho(t) = |x(t)|$$

In ogni caso se vediamo il segnale originale come componente in fase si può applicare il DEMOD. SINCRONO; Il rivelatore di inviluppo non funziona, perchè non è detto che $|x(t)| = x(t)$.

C. Segnale SSB : l' espressione risulta

$$X_{SSB}(t) = \frac{x(t)}{2} \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - \frac{\check{x}(t)}{2} \sin(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

in particolare

$$X_c(t) = \frac{x(t)}{2} = \text{comp. in fase}$$

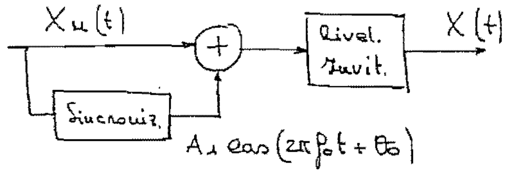
$$X_S(t) = \frac{\check{x}(t)}{2} = \text{comp. in quadratura}$$

$$\rho(t) = \sqrt{\frac{x^2(t)}{4} + \frac{\check{x}^2(t)}{4}}$$

Anche in questo caso il DEMOD. SINCRONO funziona sempre, mentre il RIVEL. DI INVILUPPO non consente di risalire ad $x(t)$.

DEMODULATORE CON SINCRONIZZATORE E RIVELATORE D'INVILUPPO

Consideriamo lo schema a lato e verifichiamo come esso consenta la demodulazione di qualsiasi segnale modulato in amp.



Schema S3

A. Segnale AM : l'espressione risulta

$$X_M(t) = X_{AM}(t) = A_0\left[1 + \mu x(t)\right]\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

$$X_M(t) + A_1\cos(2\pi f_0 t + \theta_0) = \left[A_0 + A_1 + \mu x(t)\right]\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

Dimensionando A_1 sufficientemente grande da garantire che $A_0 + A_1 + \mu x(t)$ sia sempre positivo dal rivelatore di inviluppo esce $\rho(t) = |A_0 + A_1 + \mu x(t)|$ e quindi

$$\rho(t) = |A_0 + A_1 + \mu x(t)| = A_0 + A_1 + \mu x(t)$$

che essendo proporzionale a $x(t)$ ne permette la ricostruzione.

B. Segnale SSB : l'espressione risulta :

$$X_M(t) = X_{SSB}(t) = \frac{x(t)}{2}\cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - \frac{\check{x}(t)}{2}\sin(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

$$X_M(t) + A_1\cos(2\pi f_0 t + \theta_0) = \left(A_1 + \frac{x(t)}{2}\right)\cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - \frac{\check{x}(t)}{2}\sin(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

in uscita dal rivelatore di inviluppo avremo $\rho(t)$ ovvero :

$$\rho(t) = \sqrt{\left(A_1 + \frac{x(t)}{2}\right)^2 + \frac{\check{x}^2(t)}{4}} =$$

$$= \left|A_1+\frac{x(t)}{2}\right| \sqrt{1+\frac{\check{x}^2(t)}{4\left(A_1+\frac{x(t)}{2}\right)^2}}$$

ponendo $A_1 >> 1$

$$\rho(t) \simeq \left|A_1 + \frac{x(t)}{2}\right|$$

per ipotesi $|x(t)|<1$, quindi

$$A_1+\frac{x(t)}{2} > 0 .$$

ovvero

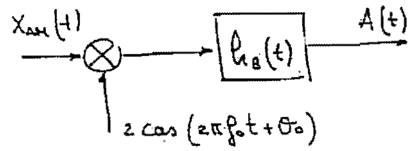
$$\left|A_1+\frac{x(t)}{2}\right| = A_1 + \frac{x(t)}{2}$$

Che è appunto proporzionale ad $x(t)$. Per i segnali DSB non essendoci $\check{x}(t)$, non è neppure necessario porre $A_1 >> 1$.

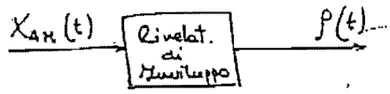
Riassumendo:

	Demod. Lineare	Rivelat. di Inviluppo	Linearizz. + Riv. Invil.
AM $\mu \le 1$	SI	SI	SI
AM $\mu > 1$	SI	NO	SI
DSB	SI	NO	SI
SSB	SI	NO	SI

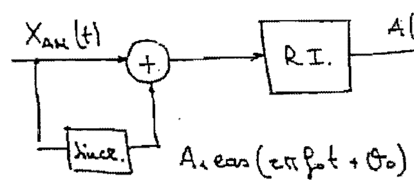
Demodulatore Lineare



Rivelatore di inviluppo



Linearizzatore più Rivelatore di Inviluppo

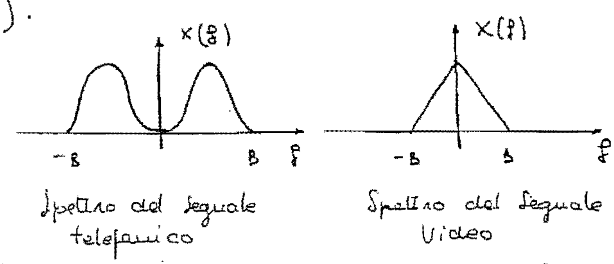


MODULAZIONE VSB (Vestigial Side Band)

La modulazione VSB, associa al segnale da trasmettere $x(t)$, un segnale $X_{VSB}(t)$ che ha per componente in fase un termine proporzionale a $x(t)$ e per componente in quadratura una generica trasformazione T di $x(t)$; in sostanza:

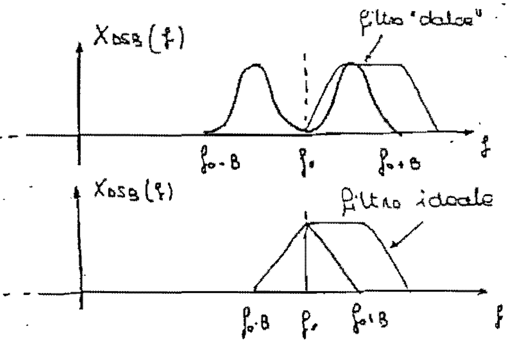
$$X_{VSB}(t) = \frac{x(t)}{2}\cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - T[x(t)]\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t + \theta_0) \qquad (5.4)$$

Lo spettro di un generico segnale $x(t)$, può avere i più svariati andamenti; ciò nonostante, i segnali possono essere suddivisi fra quelli che hanno (segn. telefonici) componente armonica nulla nell'intorno dell'origine e quelli che invece hanno componente armonica in zero (ad esempio segnali video).

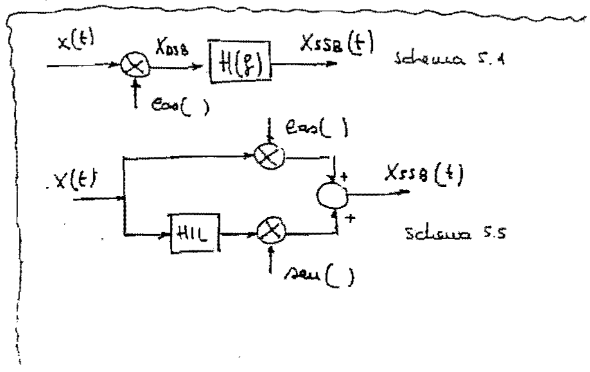


È evidente che nel primo caso, per applicare una modulazione SSB, volendo eliminare una banda laterale è sufficiente un filtro "dolce". Nel secondo caso invece è necessario un filtro ideale che tagli esattamente in f_0. (trascurando le freq. negative)

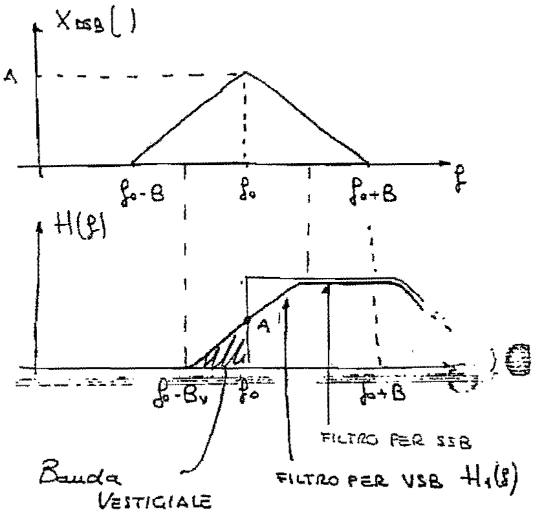
Per quanto detto la modulazione SSB è semplice ed efficiente per i segnali telefonici, mentre risulta assai problematica per i segnali video.



Ricordiamo inoltre che un segnale SSB può essere ottenuto con filtraggio in banda passante (schema 5.4) o con il filtraggio in banda base (Schema 5.5).



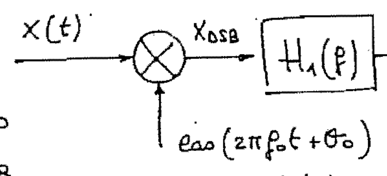
La modulazione VSB si propone di ovviare proprio a questo inconveniente. Anziché eliminare una banda laterale lasciandone una inalterata, elimina una solo parzialmente e ne lascia una parzialmente inalterata.
L'operazione può essere analizzata per via grafica.
Il requisito fondamentale è la simmetria tra la parte di banda "trasmessa" che viene eliminata e la parte di quella "eliminata" che viene trasmessa. Il filtro che può avere pendenza dolce deve avere simmetria dispari rispetto ad un punto stabilito A.



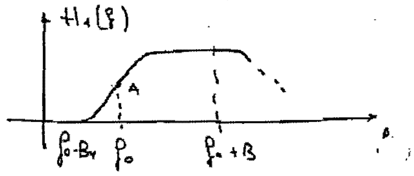
La banda di un segnale VSB è maggiore di quella di un segnale SSB, per la presenza di B_V, detta banda VESTIGIALE; in sostanza

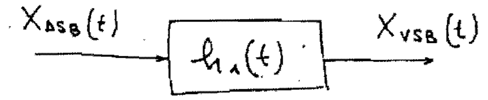
$$B_{VSB} = B + B_V$$

nella quale B è la banda del segnale originale.
Per ottenere un segnale VSB, si può adattare lo schema 5.4, sostituendo al filtro passa banda $H(f)$ un filtro reale $H_1(f)$ che rispetti le suddette caratt.
Come nel caso della SSB lo schema 5.6 filtra in banda passante. Ora dimostriamo come sia possibile eseguire il filtraggio in banda base ottenendo un analogo dello schema 5.5.

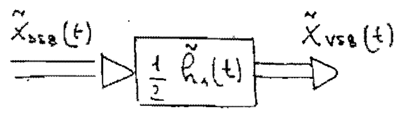


Schema 5.6





Ricordiamo che

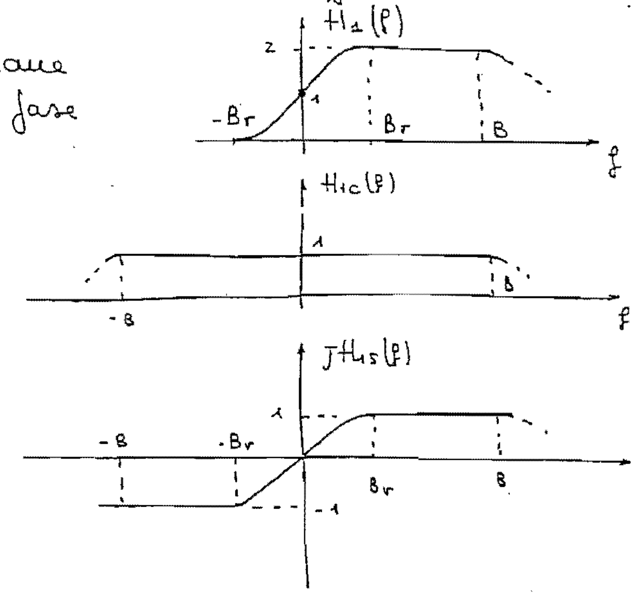


$$x_{DSB}(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - 0$$

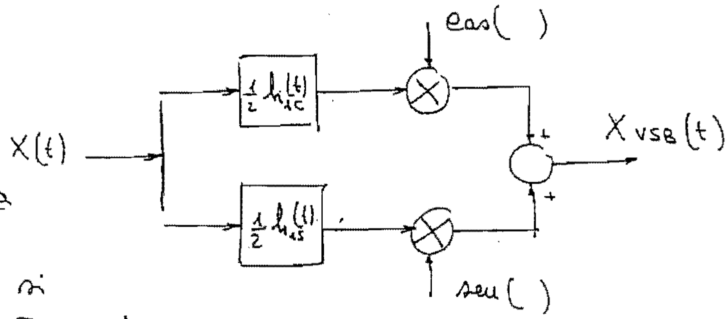
Scriviamo $\tilde{H}_1(f)$ in funzione delle componenti in fase e in quadratura.

$$H_{1C}(f) = \frac{\tilde{H}_1(f) + \tilde{H}_1^*(-f)}{2}$$

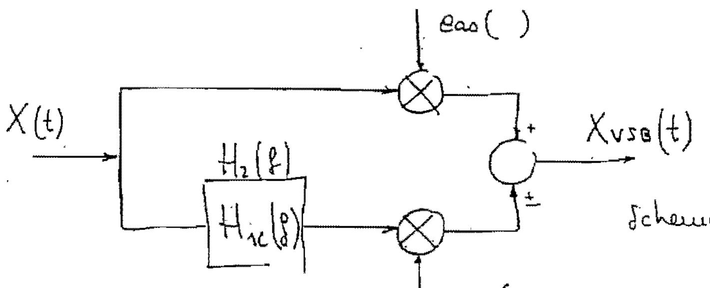
$$H_{1S}(f) = \frac{\tilde{H}_1(f) - \tilde{H}_1^*(f)}{2j}$$



Possiamo associare alle due componenti in fase e in quadratura le rispettive di $H_1(f)$ possiamo portare fuori il fattore $\frac{1}{2}$. Inoltre h_{1C} è unitario nella banda di $x(t)$, quindi può essere tolto. Allora si perviene al seguente schema



VSB = Banda Base!



Schema 5.7

Lo schema 5.7 è l'analogo del 5.5 per la modulazione VSB. L'unica differenza sta nel filtraggio in banda base: al posto di un filtro di Hilbert che è ideale, inseriamo $H_{1C}(f)$ che è reale.

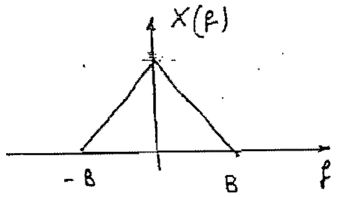
Anche la modulazione VSB può essere LB o UB a seconda del segno + o − nell'espressione (5.4)

CONVERSIONE DI FREQUENZA

Consideriamo un segnale DSB nella forma

$$x_{DSB}^{f_0}(t) = x(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \theta_0\right)$$

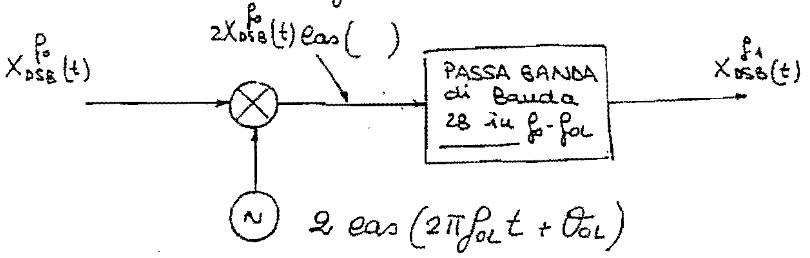
alla frequenza f_0; in sostanza lo spettro di $x(t)$ è traslato in f_0. Supponiamo di voler passare dalla frequenza f_0 alla frequenza f_1.



Supponiamo $x(t)$ di banda B allora x_{DSB} è di banda $2B$ centrata in f_0.

Nota: Questa operazione viene normalmente impiegata per distinguere l'UPLINK dal DOWNLINK della trasmissione satellitare (in genere UPLINK 6GHz, e DOWNLINK a 4GHz).

L'operazione di "conversione di frequenza" può essere realizzata con lo schema seguente.



$$x_{DSB}^{f_0}(t)\cdot 2\cos\left(2\pi f_{OL}t+\theta_{OL}\right) = 2x(t)\cos\left(2\pi f_0 t+\theta_0\right)\cos\left(2\pi f_{OL}t+\theta_{OL}\right)$$

$$= x(t)\cos\left[2\pi\left(f_0+f_{OL}\right)+\left(\theta_0+\theta_{OL}\right)\right]+$$

$$+\ x(t)\cos\left[2\pi\left(f_0-f_{OL}\right)+\left(\theta_0-\theta_{OL}\right)\right] \qquad (6.1)$$

ponendo in cascata un filtro passa banda centrato ad esempio sulla frequenza differenza f_0-f_{OL}, rimane

$$x_{DSB}^{f_0}(t) = x(t)\cos\left[2\pi\left(f_0-f_{OL}\right)+\left(\theta_0-\theta_{OL}\right)\right]$$

se il nostro obbiettivo è trasformare X_{DSB} ad f_0 in X_{DSB} ad f_1, scegliendo f_{OL} in modo che

$$\underline{f_1 = f_0 - f_{OL}} \qquad (6.2)$$

otteniamo

$$X_{DSB}^{f_1}(t) = X_{DSB}^{f_0}\, 2\cos\left(2\pi f_{OL} t + \theta_{OL}\right) =$$

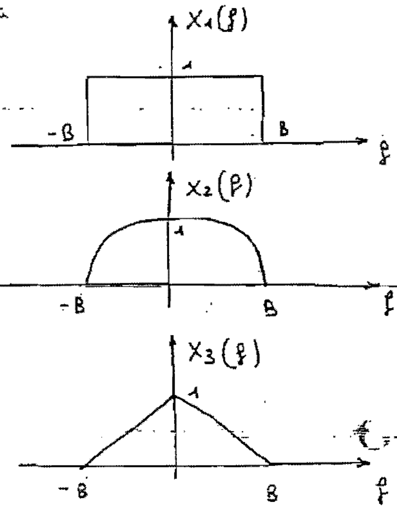
$$= X(t)\cos\left(2\pi f_1 t + \theta_1\right) \qquad (6.3)$$

Analogamente si può scegliere il filtro in modo da conservare la somma $f_0 + f_{OL}$; in tal caso poniamo:

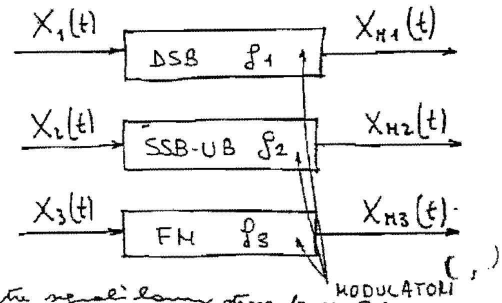
$$f_1 = f_0 + f_{OL} \qquad (6.4)$$

MULTIPLAZIONE A DIVISIONE DI FREQUENZA (FDM)

Supponiamo di avere tre generici segnali di banda B, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ aventi uno spettro $X_1(f)$, $X_2(f)$ e $X_3(f)$.
Se trasmettessimo simultaneamente i tre segnali sullo stesso canale, il risultato sarebbe una sovrapposizione dei tre; in frequenza lo spettro risultante sarebbe esattamente la somma di $X_1(f)$, $X_2(f)$ e $X_3(f)$.

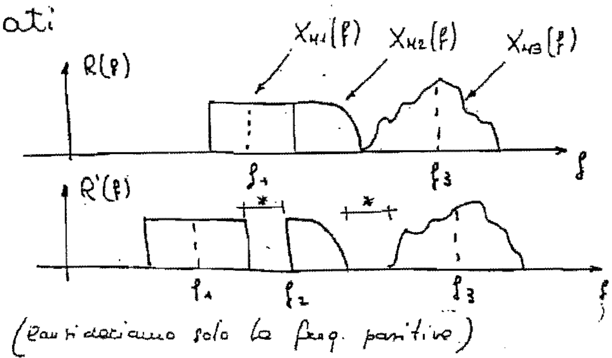


Supponiamo di modulare i tre segnali anche in modo diverso.
In generale si può pensare di modulare $x_1(t)$ con DSB alla frequenza f_1; $x_2(t)$ con SSB alla frequenza f_2 e $x_3(t)$ con modulazione FM alla frequenza f_3 (vedremo in seguito cosa significa).
Scegliendo opportunamente le frequenze f_1, f_2 e f_3, in relazione alla banda del segnale modulato, in modo che i singoli spettri non si sovrappongano, avremo la seguente situazione. In frequenza gli spettri non si sovrappongono, allora si possono sommare nel tempo i segnali modulati.



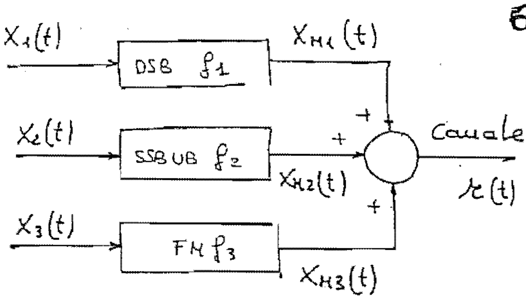
(i tre segnali hanno stessa banda B)

In realtà per facilitare il filtraggio in ricezione, è bene separare i singoli spettri, garantendo la cosiddetta BANDA DI GUARDIA*.



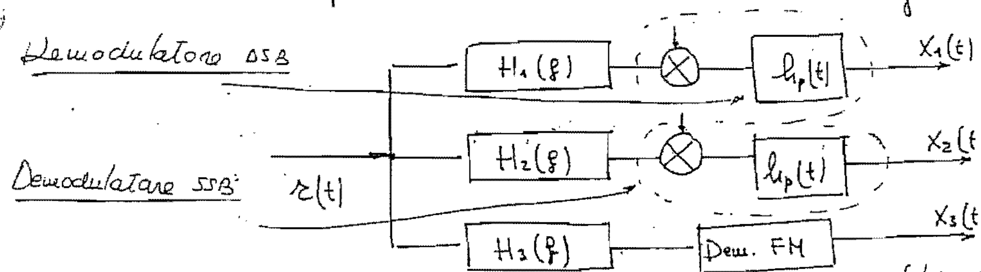
(Consideriamo solo le freq. positive)

Con una operazione di questo tipo si dice che i tre segnali sono stati MULTIPLATI IN FREQUENZA.



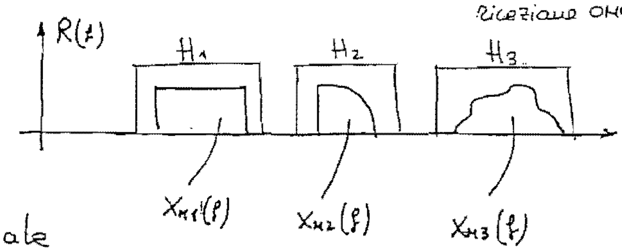
Multiplare in frequenza i tre segnali significa sommare $x_{1M}(t)$, $x_{2M}(t)$ e $x_{3M}(t)$ nel tempo.

In ricezione per riottenere i singoli segnali $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, basta filtrare con la banda opportuna alle varie frequenze f_1, f_2, f_3; per ciascuna di esse si ottiene un segnale modulato, perciò occorrerà un demodulatore opportuno. In generale, la situazione può essere riassunta nel seguente.



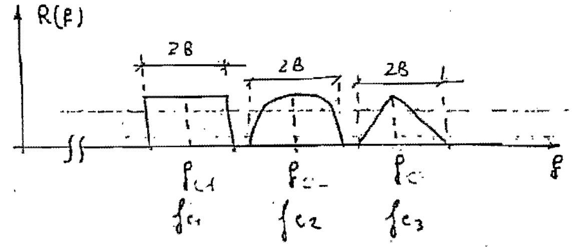
Schema di ricezione OMODINA

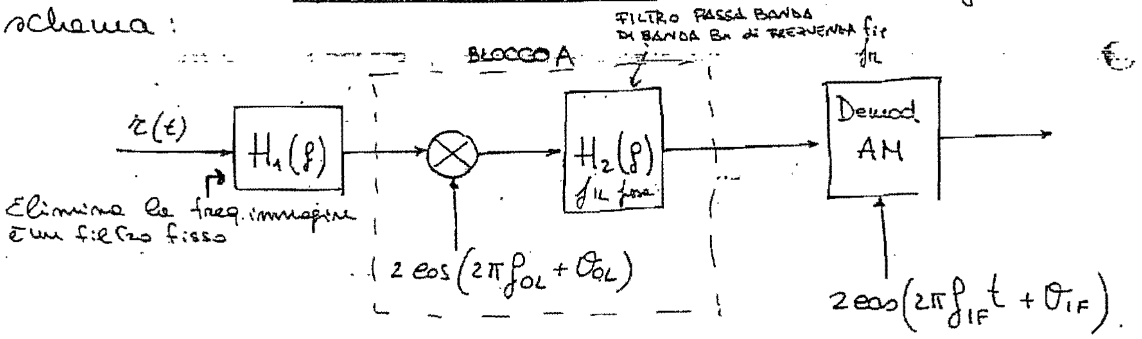
Il segnale ottenuto dalla multiplazione $r(t)$, ha uno spettro $R(f)$. Il sistema sopra descritto per la ricezione del segnale $r(t)$ è detto OMODINA; in esso si impiega un filtro e un demodulatore dedicati per ogni frequenza associata ad un segnale. Nel caso esaminato si hanno tre diverse portanti e quindi si impiegano tre filtri passa banda H_1, H_2 e H_3.



RICEVITORE SUPERETERODINA

Supponiamo di avere tre segnali AM multiplati in frequenza alle frequenze f_1, f_2, f_3; per recuperare i singoli segnali, si può impiegare un ricevitore OMODINA, visto in precedenza. Una soluzione più economica, che consente l'impiego di componenti che non dipendano dalla particolare trasmissione (filtri generici), si ha con un ricevitore SUPERETERODINA, basata sul seguente schema:





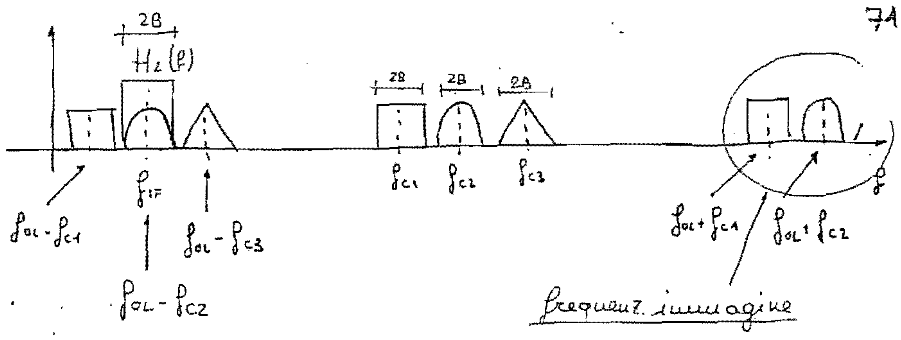
Il segnale multiplato è $r(t)$ e ha uno spettro $R(f)$ come in figura.

$$r(t) = x_{1M}(t) + x_{2M}(t) + x_{3M}(t)$$

Schema di un RICEVITORE SUPERETERODINA. $H_1(f)$ è il FILTRO FRONTALE (di Front End): Il blocco A è un convertitore di frequenza. Il blocco Demod AM è un demodulatore AM.

Il dispositivo rappresentato è composto da un CONVERTITORE DI FREQUENZA (blocco A), che trasla l'insieme dei segnali ricevuti $r(t)$, alla frequenza f_{OL}; il filtro $H_2(f)$ è centrato alla frequenza fissa f_{IL}. Agendo sulla frequenza f_{OL} dell'oscillatore del ricevitore si fa in modo di centrare il segnale voluto nella banda di H_2. Per demodulare il segnale i-esimo $x_{Mi}(t)$, basta sintonizzare l'oscillatore di f_{OL} in modo che

$$\boxed{f_{OL} - f_{ci} = f_{IF} \quad (7.1)}$$



Nell'esempio di figura si seleziona f_{OL} in modo che $f_{OL}-f_{C2}=f_{IF}$, in questo modo si fa cadere nella banda solo il canale di $x_{M2}(t)$, quindi vengono eliminati tutti gli altri canali e viene demodulato $x_{M2}(t)$

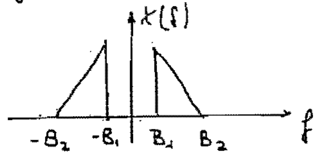
Il filtro $H_2(f)$ ha il compito di eliminare i canali adiacenti a quello selezionato; inoltre elimina anche la frequenza immagine $(f_{OL}+f_{ci})$ che viene a comparire nella conversione di frequenza del blocco A. In seguito il demodulatore AM, estrae il segnale in banda base, che era stato trasmesso in origine $x_i(t)$.
Il filtro $H_2(f)$ è di banda 2B circa e centrato sulla frequenza fissa f_{IF}, detta FREQUENZA INTERMEDIA; questa frequenza può essere diversa da ricevitore a ricevitore: non può essere troppo elevata perché degraderebbe la qualità di taglio del filtro stesso; allo stesso tempo ridurre eccessivamente f_{IF} significa in base alla (7.1), avvicinare le repliche in

$$f = f_{OL}-f_{IF} \quad e \quad f' = f_{OL}+f_{IF}$$

rischiando la sovrapposizione.
Il filtro $H_1(f)$ ha il compito di eliminare eventuali frequenze immagini introdotte nel canale.

SEGNALI IN PRESENZA DI ERRORI DI FASE E DI FREQUENZA

Si consideri un generico segnale con componente armonica nulla in prossimità dell'origine (segnale telefonico), con lo spettro $X(f)$ di figura.

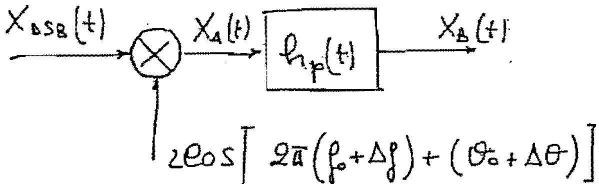


(A.) Modulazione DSB in presenza di errori

Il segnale modulato ha espressione

$$x_{DSB}(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

Demoduliamo il segnale con un demodulatore sincrono e supponiamo che l'oscillatore locale commetta un errore Δf rispetto a f_0 e un errore $\Delta\theta$ rispetto a θ_0



Nel dominio del tempo

$$x_A(t) = x_{DSB}(t)\cdot 2\cos\left[2\pi(f_0+\Delta f) + (\theta_0+\Delta\theta)\right] =$$

$$= 2x(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)\cos\left[2\pi(f_0+\Delta f) + (\theta_0+\Delta\theta)\right] =$$

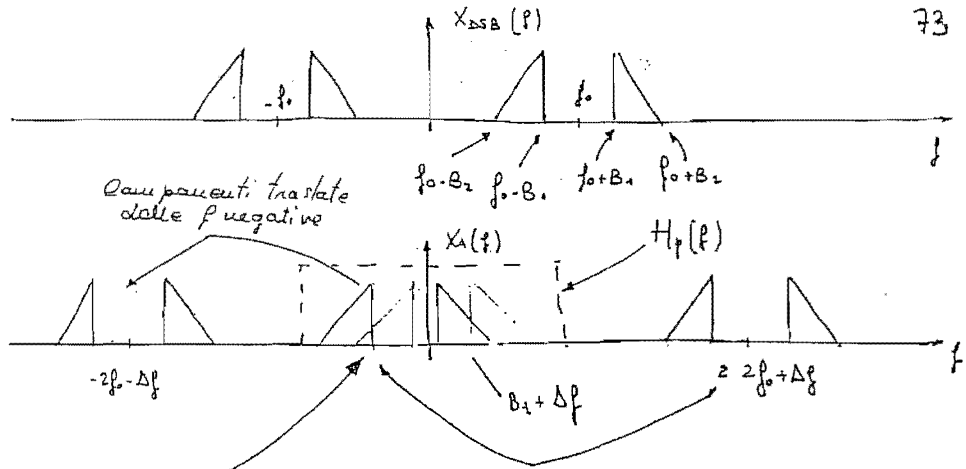
$$= x(t)\cos\left[2\pi(2f_0+\Delta f) + (2\theta_0+\Delta\theta)\right] +$$

$$+ x(t)\cos\left[2\pi\Delta f + \Delta\theta\right] \qquad (7.3)$$

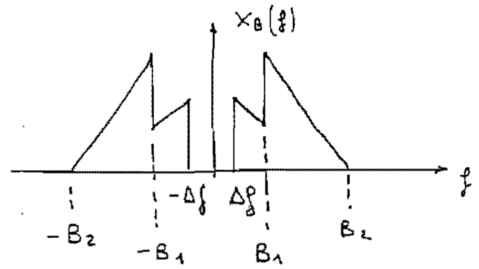
Il filtro $h_p(t)$ elimina la componente a frequenza doppia, quindi:

$$x_B(t) = x_A(t)\otimes h_p(t) = x(t)\cos(2\pi\Delta f t + \Delta\theta) \qquad (7.4)$$

In frequenza si nota una notevole distorsione; supponendo $\Delta\theta = 0$, considerato cioè l'errore di fase nullo $\Delta f < B_1$, otteniamo:



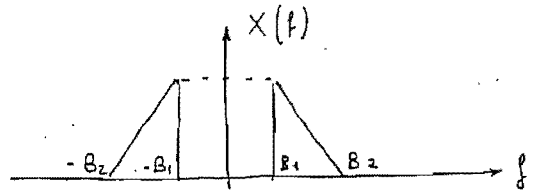
La sovrapposizione delle componenti che vengono a trovarsi nella banda di $H_p(f)$ da origine ad una forte distorsione, quindi $x_B(t)$ è molto diverso da $x(t)$

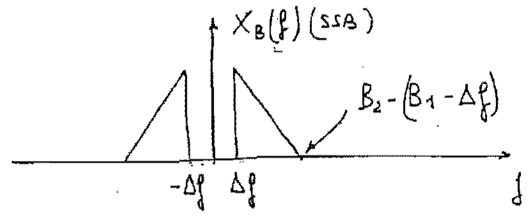


B.) Modulazione SSB (UB) in presenza di errori

Senza ripetere i calcoli, possiamo dire che mancando la banda laterale (in questo caso quella inferiore), non si hanno componenti in sovrapposizione.

Le due bande laterali vengono portate con il mixer in Δf e $-\Delta f$ come in figura (quelle in $2f_0+\Delta f$ come prima vengono eliminate da H_p). Come si vede lo spettro è qualitativamente identico, tuttavia si ha un abbassamento frequenziale di tutte le componenti armoniche di $B_1-\Delta f$ (assumendo come prima $\Delta\theta=0$ e $\Delta f<B_1$). Il segnale è distorto ma l'informazione non è compromessa.

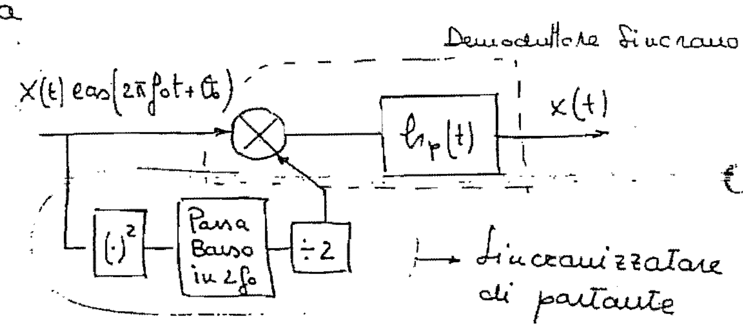




Per questo motivo si dice che la SSB è più "robusta" della DSB.

SINCRONIZZATORE DI PORTANTE

Per ovviare agli inconvenienti appena analizzati, molto spesso si estrae frequenza e fase della portante direttamente dal segnale ricevuto. Anziché impiegare un oscillatore locale, si ricorre al seguente schema



Vediamo cosa fornisce questo sincronizzatore:

$$\left(x(t)\cos(2\pi f_0 t+\theta_0)\right)^2 = x^2(t)\cos^2(2\pi f_0 t+\theta_0) =$$

$$= \frac{\cancel{x^2(t)}}{2} + \frac{x^2(t)}{2}\cos\left[2\pi(2f_0)t+2\theta_0\right] =$$

eliminato dal filtro

Ricordiamo

$$x^2(t) = K + y(t)$$

$$\left(x(t)\cos(2\pi f_0 t+\theta_0)\right)^2 = \frac{K}{2}\cos\left(2\pi(2f_0)t+2\theta_0\right) + \frac{y(t)}{2}\cos(\quad)$$

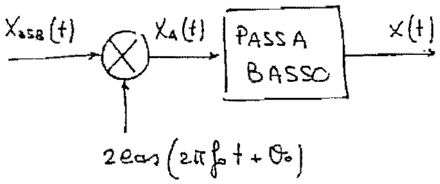
$$\frac{1}{2}\left[K+y(t)\right]\cdot\cos\left[2\pi(2f_0)t+2\theta_0\right] = \frac{K}{2}\cos(2\pi(2f_0)t+2\theta_0) + \frac{y(t)}{2}\cos(2\pi(2f_0)t+2\theta_0)$$

DEMODULAZIONE IN PRESENZA DI RUMORE

Si consideri un demodulatore sincrono e un segnale DSB $x_{DSB}(t)$ di banda 2B, nella frequenza f_0:

$$x_{DSB}(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

Come noto



$$x_A(t) = x(t) + x(t)\cos\left[2\pi(2f_0)t + 2\theta_0\right]$$

per ricostruire $x(t)$ è sufficiente un filtro passa basso che elimini da $x_A(t)$ la componente a $2f_0$. Questo significa che basta un passa basso di banda B; se la banda fosse maggiore avremmo dei problemi nel caso in cui B risulti più grande della portante f_0.

Consideriamo ora un "rumore" AWGN; esso è rappresentabile mediante un processo gaussiano a media nulla, con densità spettrale di potenza $N_0/2$, che chiameremo $n(t)$. **

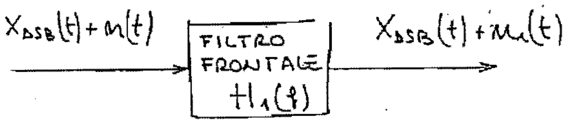
A. Demodulazione sincrona di un segnale DSB con rumore $n(t)$

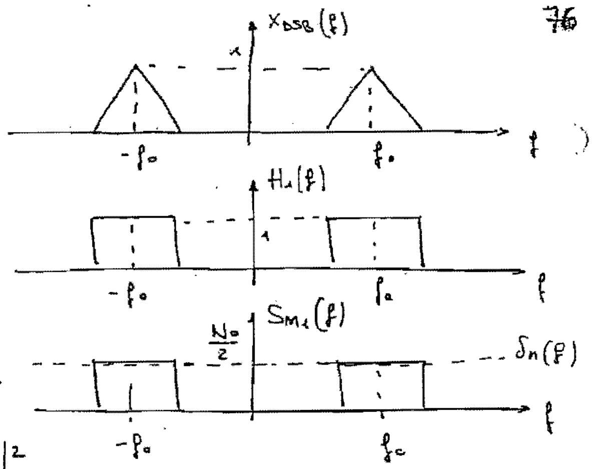
Il ricevitore riceve in ingresso segnale DSB e rumore $n(t)$ sovrapposti:

$$x_{DSB}(t) + n(t)$$

In frequenza lo spettro di $x_{DSB}(t)$ è noto; la densità spettrale di potenza $S_n(f)$ del rumore è costante e pari a $N_0/2$. Per eliminare quanto più rumore possibile si esegue un prefiltraggio con un passa banda centrato alla frequenza della portante, il più possibile selettivo: in sostanza questo filtro, detto FILTRO FRONTALE (Front end) deve avere una banda il più possibile vicina a quella del segnale DSB, ovvero circa 2B. (B è la banda di $x(t)$).

** Una misura quantitativa del rumore presente è rappresentata dal rapporto fra la potenza del segnale utile e la potenza del rumore S/N.





In uscita da H_1 avremo ancora $x_{DSB}(t)$ sommato però al processo $n_1(t)$ come in figura a lato. In sostanza

$$S_{n_1}(f) = S_n(f)\cdot|H_1(f)|^2 = \frac{N_0}{2}|H_1(f)|^2$$

Questa operazione non compromette la possibilità di stimare $n_1(t)$, perchè $n(t)$ è AWGN, per cui n e n_1 sono incorrelati e indipendenti.

Il filtro di "front end" è necessario per stimare il rapporto segnale utile rumore in ingresso; senza H_1 il rapporto fra potenza di x_{DSB} e potenza di n sarebbe nullo, perchè N è infinita. A valle del filtro frontale avremo la potenza del DSB pari a $P_x/2$ (noto dallo studio della mod. DSB).
La potenza di $n_1(t)$ risulta

$\frac{N_0}{2}\cdot 2\cdot 2B = 2N_0B$

$$N_1 = N_i = \int_{-\infty}^{+\infty}|S_{n_1}(f)|^2 df = 2N_0B$$

Allora il rapporto segnale utile in ingresso e rumore in ingresso risulta:

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{P_x}{4N_0B} \qquad (7.6)$$

Poniamo ora il risultato del prefiltraggio in ingresso al demodulatore sincrono; osserviamo però che

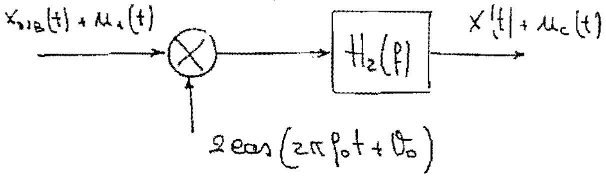
$$x_{DSB}(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t + \vartheta_0)$$

scrivendo $n_1(t)$ come componente in fase e componente in quadratura:

$$n_1(t) = n_c(t)\cos(2\pi f_0 t + \vartheta_0) - n_s(t)\,\mathrm{sen}(\quad)$$

Come noto il demodulatore estrae solo le componenti in fase quindi in uscita si ho:

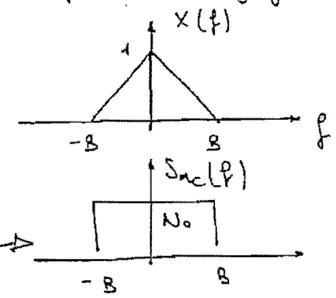
$$X(t) + n_c(t)$$



Il filtro $H_2(f)$ è di banda B; esso quindi elimina le componenti di rumore che non aveva eliminato il filtro frontale. Per questo motivo nella demodulazione DSB il filtro di front end non è "critico".

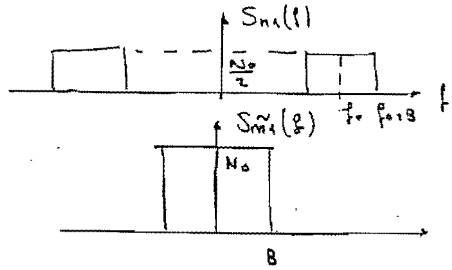
Il rapporto segnale utile rumore in uscita, può essere calcolato sulla base degli spettri di figura, cui risulta:

$$\frac{S_u}{N_u} = \frac{P_x}{2N_0B} = 2\frac{S_i}{N_i} \qquad (7.7)$$



Osserviamo che tale rapporto è raddoppiato rispetto all'ingresso, quindi la demodulazione ha introdotto un miglioramento.

Vediamo come è stata ricavata $S_{nc}(f)$; ricordiamo che nota $S_{n_1}(f)$ si calcola l'inviluppo complesso $S_{\tilde{n}_1}(f)$



Dall'inviluppo complesso

$$S_{n_s}(f) = S_{nc}(f) = \frac{S_{\tilde{n}_1}(f) + S_{\tilde{n}_1}(-f)}{2}$$

B. Demodulazione sincrona di un segnale SSB con rumore $n(t)$

Il ricevitore rileva in ingresso 78

$$X_{SSB}(t) + n(t)$$

in questo caso il segnale SSB è di banda B, così il filtro frontale dovrà essere passa banda in f_0 ma di banda B; fra f_0 e $f_0 + B$. In questo caso allora in ingresso al demodulatore avremo $X_{SSB}(t)$ e un processo $n_1(t)$ con potenza

$$N_1 = N_i = \int_{-\infty}^{+\infty} |S_{n_1}(f)|^2 \, df = N_0 B \qquad (7.8)$$

come noto la potenza di un segnale SSB è $P_x/4$, quindi il ~~rapporto segnale utile rumore all'ingresso~~ sarà:

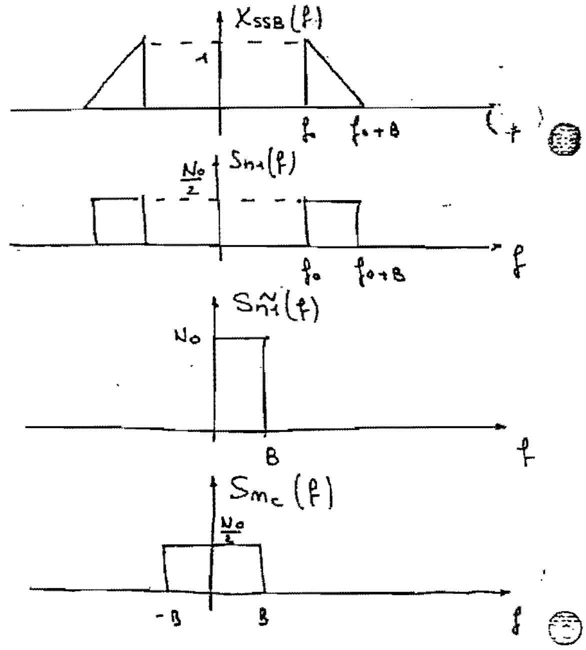
$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{P_x}{4N_0B} \qquad (7.9)$$

sincrono estrae la sola componente in fase; sapendo che $X_{SSB}(t) = \frac{x(t)}{2}\cos(\ ) + \frac{\check{x}(t)}{2}\sin(\ )$ viene estratto $\frac{x(t)}{2}$; per il rumore viene estratto $n_c(t)$

In questo caso però $S_{n_1}(f)$ è quella di figura. Calcoliamo $S_{\tilde{n}_1}(f)$ e dalla relazione

$$S_{n_c}(f) = \frac{S_{\tilde{n}_1}(f) + S_{\tilde{n}_1}(-f)}{2}$$

determiniamo la densità spettrale di potenza della componente in fase $n_c(t)$. Siccome la comp. in fase di $X_{SSB}(t)$ è $\frac{x}{2}(t)$ la pot. del segnale utile è $P_x/4$, quindi il rapporto S/N in uscita risulta

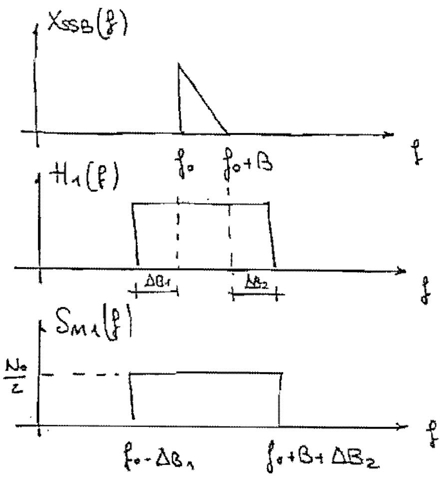


$$\frac{S_u}{N_u} = \frac{P_x}{4N_0B} \qquad (7.10)$$

Criticità del filtro frontale per la demodulazione SSB.

Supponiamo che il filtro frontale H_1, anziché essere di banda B, ecceda di ΔB_1 a sx e di ΔB_2 a dx.

In questo caso il processo $n_1(t)$ che si presenta in ingresso al demodulatore ha densità spettrale $S_{n_1}(f)$ costante e pari a $\frac{N_0}{2}$ nell'intervallo che va da $f_0 - \Delta B_1$ a $f_0 + B + \Delta B_2$.



Innanzi tutto diminuisce il rapporto S/N in ingresso, perché

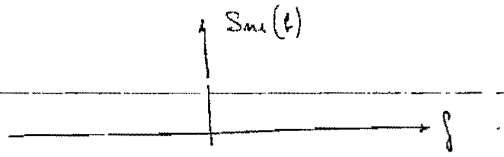
$$S_i = P_x/4$$

$$N_i = N_0 (B + \Delta B_1 + \Delta B_2)$$

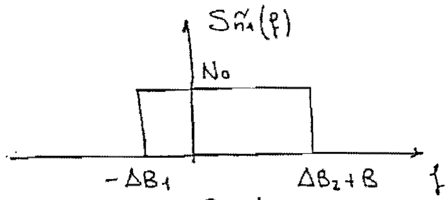
(anziché $N_0 B$)

Inoltre calcoliamo la componente in fase di $n_1(t)$; partiamo da $S_{n_1}(f)$ e quindi da $S_{\tilde{n}_1}(f)$; sapendo che

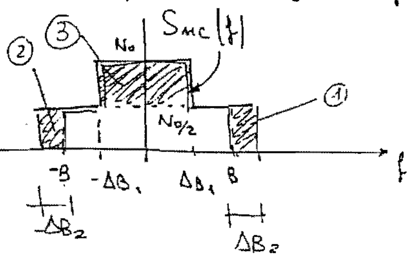
$$S_{nc}(f) = \frac{S_{\tilde{n}_1}(f) + S_{\tilde{n}_1}(-f)}{2}$$



Si viene a creare la zona ③ che essendo proprio nella banda di $x(t)$, non può più essere eliminata.



Per questo motivo ΔB_1 deve essere il più piccolo possibile. L'eccedenza ΔB_2 non influisce perché comunque viene eliminata tramite $H_2(f)$.



Facciamo ora un rapido confronto del comportamento in demodulazione di DSB e SSB nei confronti del rumore AWGN $m(t)$.

P_{DSB} = pot. trasmessa in DSB = $\frac{P_x}{2}$

$$\left(\frac{S_u}{N_u}\right)_{DSB} = \frac{P_x}{2N_0B} = 2\left(\frac{S_i}{N_i}\right)_{DSB}$$

P_{SSB} = pot. trasmessa in SSB = $\frac{P_x}{4}$

$$\left(\frac{S_u}{N_u}\right)_{SSB} = \frac{P_x}{4N_0B} = \left(\frac{S_i}{N_i}\right)_{SSB}$$

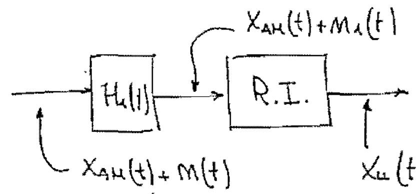
Osserviamo che anche se

$$\left(\frac{S_u}{N_u}\right)_{SSB} = \frac{1}{2}\left(\frac{S_u}{N_u}\right)_{DSB}$$

l'efficienza della SSB è la stessa della DSB, perchè il rapporto S/N è calcolato su metà della potenza in trasmissione.

C. Rivelatore di inviluppo con AM ($\mu \leq 1$)

Anche in questo caso si riceve un segnale AM sovrapposto allo stesso rumore $n(t)$ AWGN; occorre anche in questo caso un filtro di frontale di banda $2B$ centrato in f_0, all'uscita del quale si ha ancora $x_{AM}(t)$ e un rumore n_1 di banda due $2B$. All'ingresso del rivelatore di inviluppo avremo:



$$x_{AM}(t) + n_1(t) = A_0\left[1 + \mu_0 x(t)\right]\cos\left(\omega_0 t + \theta_0\right) + n_1(t) =$$

$$= A_0\left[1 + \mu x(t)\right]\cos(\omega_0 t + \theta_0) + n_c(t)\cos\left(\omega_0 t + \theta_0\right) - n_s(t)\operatorname{sen}\left(\omega_0 t + \theta_0\right) =$$

$$= \left[A_0 + \mu A_0 x(t) + n_c(t)\right]\cos\left(\omega_0 t + \theta_0\right) - n_s(t)\operatorname{sen}\left(\omega_0 t + \theta_0\right)$$

In questo caso la componente in fase è

$$A_0 + \mu A_0 x(t) + n_c(t)$$

mentre quella in quadratura è $n_s(t)$.
Ricordiamo che l'uscita del rivelatore di inviluppo è il modulo dell'inviluppo complesso, quindi:

$$x_u(t) = \sqrt{\left[A_0 + \mu A_0 x(t) + n_c(t)\right]^2 + n_s^2(t)}$$

Se vale la condizione sul rapporto segnale utile rumore in ingresso molto grande:

$$\underline{\frac{S_i}{N_i} \gg 1} \qquad (7.11)$$

si ottiene:

$$x_u(t) = \sqrt{\left[A_0 + \mu A_0 x(t) + n_c(t)\right]^2}$$

$$\text{con} \quad A_0 + \mu x(t) A_0 + n_c(t) \geq 0$$

quindi:

$$\underline{x_u(t) = A_0 + \mu A_0 x(t) + n_c(t)} \qquad (7.12)$$

ed è lo stesso risultato che si otterrebbe con un demodulatore sincrono. Se la (7.11) non è soddisfatta si ha la "MUTILAZIONE DEL SEGNALE": ciò che si ottiene in uscita è una funzione non lineare del segnale originale e quindi non è possibile estrarlo. Per garantire il soddisfacimento della condizione (7.11) è necessario scegliere il più preciso possibile il filtro frontale, per ridurre il più possibile la densità spettrale di potenza del rumore n_1, alzando il rapporto fra segnale utile e rumore in ingresso.

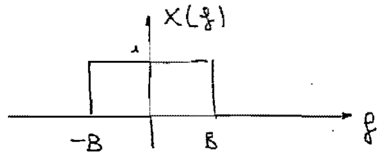
MODULAZIONI ESPONENZIALI

MODULAZIONE DI FREQUENZA (FM) E DI FASE (PM)

In entrambe i casi la portante è $p(t)$

$$p(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

Nella FM viene modulata la frequenza nella PM viene modulata la fase, in ogni caso in maniera proporzionale al segnale modulante $x(t)$. Noto lo spettro di $x(t)$:



In generale il segnale modulato, può essere scritto come:

$$\boxed{x_M(t) = A_0 \cos\left[\overbrace{2\pi f_0 t + \Phi(t)}^{\theta(t)} + \theta_0\right]} \qquad (8.1)$$

nella quale $\Phi(t)$ è la funzione che mantiene le informazioni su $x(t)$. Possiamo anche scrivere

$$x_M(t) = A_0 \cos\left[2\pi f_0 t + \Phi(t) + \theta_0\right] =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{A_0 e^{j[2\pi f_0 t + \Phi(t) + \theta_0]}\right\}$$

ed è per questo che vengono dette modulazioni esponenziali.

L'argomento del coseno è detta FASE ISTANTANEA $\theta(t)$:

$$\boxed{\theta(t) = 2\pi f_0 t + \Phi(t) + \theta_0} \qquad (8.2)$$

derivando si ottiene la velocità angolare detta FREQUENZA ISTANTANEA:

$$(8.3) \qquad \boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi}\dot{\Phi}(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi}\frac{d\Phi(t)}{dt}}$$

Nella modulazione PM la funzione $\Phi(t)$, che contiene le informazioni sul segnale modulante, è la seguente

$$\boxed{\Phi(t)_{PM} = \Phi_\Delta \cdot x(t)} \qquad (8.4) \qquad (*) \text{ NOTA}$$

l'espressione del segnale $x_{PM}(t)$ pertanto risulta

$$(8.5) \qquad x_{PM}(t) = A_0 \cos\left[2\pi f_0 t + \Phi_\Delta x(t) + \theta_0\right]$$

nel caso della FM, invece si vuole che

$$\frac{1}{2\pi}\dot{\Phi}(t) = f_\Delta x(t) = \qquad \left(f(t) = f_0 + f_\Delta x(t)\right)$$

quindi risulta

$$\boxed{\Phi(t)\Big|_{FM} = 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\nu)\,d\nu} \qquad (8.6)$$

(1) NOTA

l'espressione del segnale modulato in frequenza $X_{FM}(t)$ risulta

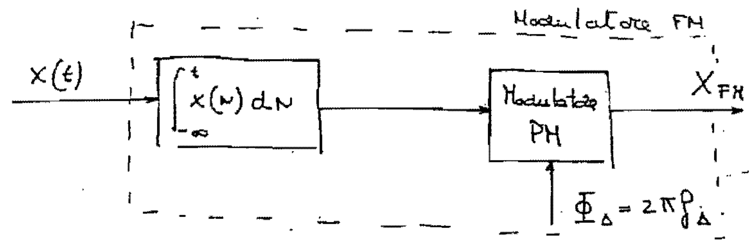
$$(8.7) \qquad X_{FM}(t) = A_0 \cos\left[2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\nu)\,d\nu + \theta_0\right]$$

la quantità Φ_Δ è detta INDICE DI MOD. DI FASE mentre la quantità f_Δ è detta INDICE DI MOD. DI FREQUENZA. Scegliendo per convenzione segnali con $|x(t)| \leq 1$, i due indici rappresentano il massimo scostamento di fase e di frequenza rispettivamente.

Modulazione di fase e Modulazione di frequenza sono strettamente legate, infatti una può essere ottenuta dall'altra mediante operazioni di derivazione o integrazione sul segnale in ingresso al modulatore.

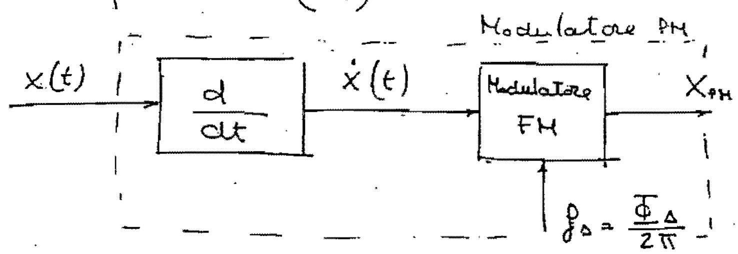
Sulla base dell'espressione (8.7).

Schema 8.1
Modulatore FM realizzato con modulatore PM



Sulla base dell'espressione (8.5)

Schema 8.2
Modulatore PM realizzato con modulatore FM

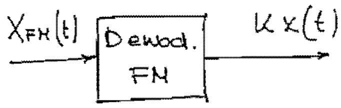


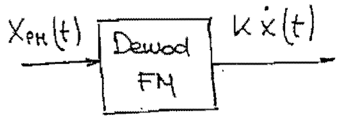
In generale come modulatore FM si utilizza un dispositivo elettronico detto VCO (Voltage Controlled Oscillator), che realizza la funzione:

$$v_{out} = A_0 \cos\left[2\pi f_0 t + K\int_{-\infty}^{t} x(t)\,d\nu + \theta_0\right]$$

Voltage Controlled Oscillator

In generale modulatori PM non esistono e vengono realizzati tramite modulatori FM come nello schema precedente (Schema 8.2).
Per ciò che riguarda la demodulazione, per definizione un demodulatore FM è un dispositivo che fornisce in uscita un segnale proporzionale ad $x(t)$ avendo in ingresso $x_{FM}(t)$.
Un demodulatore FM che riceve in ingresso un segnale PM $x_{PM}(t)$, restituisce in uscita $\dot{x}(t)$, un segnale proporzionale alla derivata di $x(t)$; allora basta integrare per completare la demodulazione PM.





Osservazione: la frequenza istantanea $f(t)$ è una funzione del tempo; nell'operazione di trasformazione di Fourier la frequenza f è una variabile indipendente.
Nei due casi, il significato di frequenza, è profondamente diverso e non va assolutamente confuso.

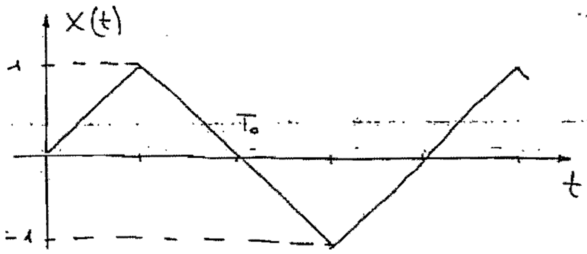
Possiamo riassumere alcuni aspetti delle mod. esponenziali.

1. L'ampiezza di un segn. modulato esponenzialmente è COSTANTE.
2. L'informazione risiede solo nell'attraversamento dello zero del segnale modulato.
3. Non sempre si riesce a visualizzare tramite l'onda del segnale modulato, l'andamento del segnale modulante.

ANDAMENTO TEMPORALE DEL SEGNALE

Supponiamo il segnale modulante di tipo triangolare di ampiezza unitaria con T_0 (T_0 non è il periodo).

Il segnale modulato, in figura o in fase è un'oscillazione comunque compresa fra $+A_0$ e $-A_0$.



Nella modulazione PM,

$$X_{PM}(t) = A_0 \cos\left[2\pi f_0 t + \Phi(t) + \vartheta_0\right]$$

$$= \underline{A_0 \cos\left[2\pi f_0 t + \Phi_\Delta x(t) + \vartheta_0\right]}$$

nella quale la fase istantanea varia con continuità perchè $x(t)$ è continuo. La frequenza istantanea risulta

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\Phi(t)}{dt} = f_0 + \frac{\Phi_\Delta}{2\pi}\dot{x}(t)}$$

il segnale $\dot{x}(t)$ non è che la derivata del segnale $x(t)$ modulante; la frequenza istantanea, allora, è proporzionale alla "pendenza", in quell'istante, del segnale. Di quanto aumenta o diminuisce $f(t)$, dipende dal segnale (in particolare sua derivata), ma anche dall'indice di modulazione.

Per $t<0$ $x(t)=0$ allora

$$f(t) = f_0$$

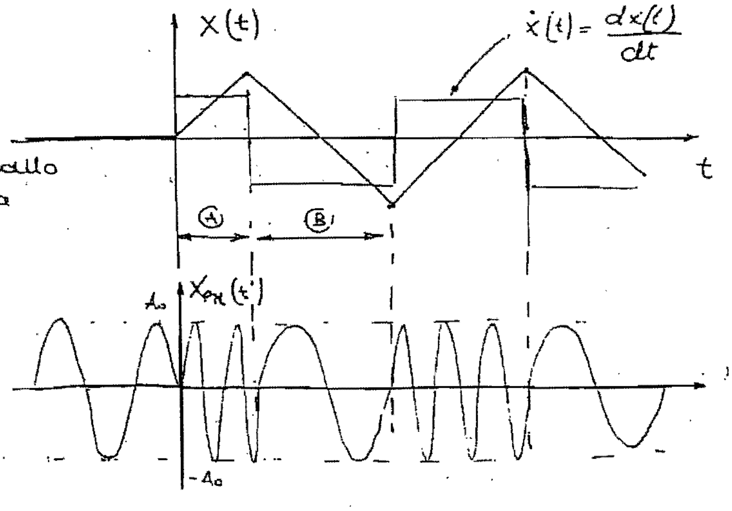
cioè si ha la portante non modulata. Nell'intervallo Ⓐ la $\dot{x}(t)$ è positiva, allora

$$f(t) = f_0 + f_\Delta \dot{x}(t) > f_0$$

Nell'intervallo Ⓑ al contrario la $\dot{x}(t)$ è neg, allora

$$f(t) = f_0 + f_\Delta \dot{x}(t) < f_0$$

In ogni caso $f(t)$ è proporzionale a $\dot{x}(t)$.



Nel caso della modulazione FM

$$X_{FM}(t) = A_0 \cos\left[2\pi f_0 t + \Phi(t) + \vartheta_0\right] =$$

$$= A_0 \cos\left[2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\mu)\,d\mu + \vartheta_0\right]$$

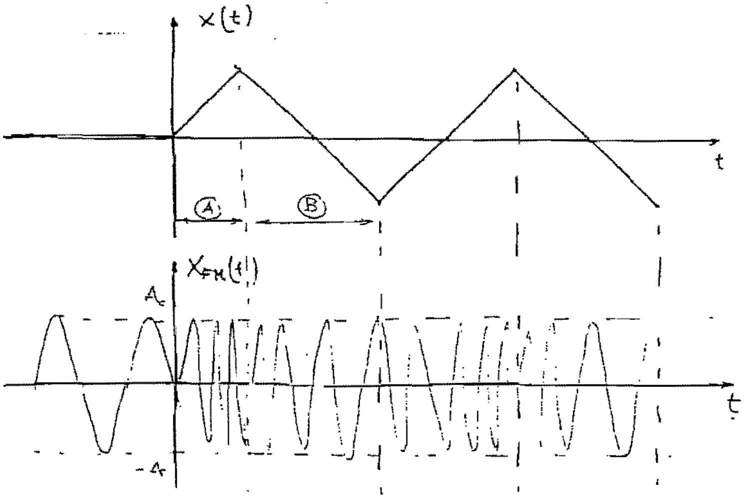
la frequenza istantanea risulta

$$\boxed{f(t) = f_0 + f_\Delta\, x(t)}$$

ovvero è proporzionale direttamente al segnale $x(t)$, tramite l'indice di modulazione f_Δ

I diagrammi temporali del segnale $x(t)$ triangolare sono i seguenti.

Per $t<0$ si ha la portante non modulata, perché $x(t)=0$. Nel tratto Ⓐ $f(t)$ aumenta linearmente in funzione di $x(t)$ e tocca il valore max in $T_0/2$. Al contrario in Ⓑ la frequenza diminuisce linearmente con $x(t)$.

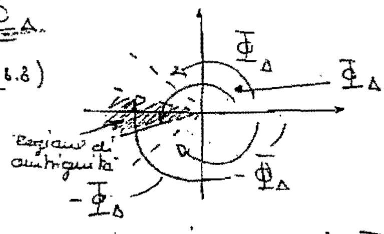


VINCOLI DI MODULAZIONE

Un sistema di modulazione deve assicurare la possibilità di determinare in maniera univoca il segnale originale. Per questo motivo occorre osservare alcuni vincoli.

A. Indice di Modulazione di fase Φ_Δ

È necessario che $\boxed{\Phi_\Delta < \pi}$ (6.8)



in questo modo siamo sicuri che, essendo $|x(t)| \le 1$ $\Phi(t)$ varia fra $-\Phi_\Delta$ e Φ_Δ. Se Φ_Δ fosse maggiore di π

B. Indice di Modulazione di frequenza f_Δ

È necessario $\boxed{f_\Delta << f_0}$ (8.9) per assicurare la natura passa banda di $x_{FM}(t)$, ovvero del segnale modulato (chiariremo in seguito questo aspetto)

C. Vincolo sulla frequenza di portante

$$\boxed{f_0 >> B} \quad (8.10)$$

In altri termini la portante deve variare molto più velocemente del segnale modulante.

ANALISI IN POTENZA DEI SEGNALI FM e PH

In entrambe i casi la potenza associata al segnale trasmesso, FM o PH che sia, vale:

$$\boxed{P_{FH} = P_{PH} = \frac{A_0^2}{2} \quad * \quad (8.11)}$$

ovvero è la potenza associata alla portante sinusoidale.

Intuitivamente si può giustificare la (8.11), pensando al vincolo (8.10); ricordiamo che per segnali periodici

$$\longrightarrow P = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt$$

mentre per segnali aperiodici

$$\longrightarrow P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

allora considerato un intervallo piccolo $x(t)$ varia poco, per cui $x_{FH}(t)$ o $x_{PH}(t)$ si scosta di poco dall'andamento della portante. In altri termini $\Phi(t)$ è ottenuto da $x(t)$ tramite relazioni lineari o integrazione; allora la banda di $\Phi(t)$ è la stessa del segnale modulante $x(t)$. Per questo motivo $\Phi(t)$ varia con la stessa velocità di $x(t)$.

$$P_{p(t)} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta_0)\, dt = \frac{1}{T}\frac{A_0^2}{2}\Big[\ t\ \Big]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{A_0^2}{2} \quad *$$

Vediamo una dimostrazione più rigorosa

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_\Delta x(t) & PM \\ 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)d\alpha & FM \end{cases}$$

$$x_M(t) = A_0 \cos\left[\overbrace{2\pi f_0 t + \underbrace{\Phi(t)}_{\alpha} + \vartheta_0}^{\beta}\right] =$$

$$= A_0 \cos\Phi(t)\cos(2\pi f_0 t + \vartheta_0) - A_0 \operatorname{sen}\Phi(t)\operatorname{sen}(2\pi f_0 t + \vartheta_0)$$

allora

$A_0 \cos\Phi(t)$ = Componente in fase

$A_0 \operatorname{sen}\Phi(t)$ = Componente in quadratura

come noto

$$P_M = \frac{1}{2}(P_c + P_s)$$

nella quale

$$P_c = \lim_{T \to \infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_c^2(t)\,dt\right]$$

$$P_s = \lim_{T \to \infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_s^2(t)\,dt\right]$$

allora

$$A_0^2\cos^2\phi(t) + A_0^2\operatorname{sen}^2\phi(t) = A_0^2$$

$$P_c + P_s = \lim_{T \to \infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[x_c^2(t) + x_s^2(t)\right]dt\right] =$$

$$= \lim_{T \to \infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A_0^2\,dt\right] = A_0^2$$

quindi

$$P_M = \frac{1}{2}(P_c + P_s) = \frac{A_0^2}{2}$$

ANALISI DELLA OCCUPAZIONE DI FREQUENZA

Come in precedenza scrivendo il segnale modulato con le componenti in fase e in quadratura, avremo

$$x_M(t) = A_0 \cos\left[2\pi f_0 t + \Phi(t) + \theta_0\right] =$$

con

$$X_c(t) = A_0 \cos\Phi(t) \qquad (8.12.1)$$
$$X_s(t) = A_0 \operatorname{sen}\Phi(t) \qquad (8.12.2)$$

sviluppando con la serie di Taylor le due espressioni (8.12.1) e (8.12.2), otteniamo

$$\boxed{\begin{aligned} X_c(t) &= A_0 \cos\Phi(t) = \left[1 - \frac{\Phi^2(t)}{2!} + \frac{\Phi^4(t)}{4!} + \ldots\right] A_0 \quad (8.12.3) \\ X_s(t) &= A_0 \operatorname{sen}\Phi(t) = \left[\Phi(t) - \frac{\Phi^3(t)}{6} + \ldots\right] A_0 \quad (8.12.4) \end{aligned}}$$

Se $x(t)$ ha banda B, la funzione $\Phi(t)$ essendo proporzionale ad $x(t)$ (nella M) o all'integrale (nella FM) di $x(t)$ ha esattamente la stessa banda. La componente in fase e quella in quadratura invece hanno banda molto maggiore di B; infatti $\Phi^2(t)$, $\Phi^3(t), \ldots, \Phi^n(t)$ sono delle convoluzioni in frequenza che allargano la banda:

$\Phi^2(t)$ ha banda $2B$
$\Phi^3(t)$ ha banda $3B$
$\vdots$
$\Phi^n(t)$ ha banda nB

la modulazione PM o FM che sia, può essere vista come la differenza tra una modulazione DSB per un coseno, meno una DSB per un seno

$$\Rightarrow x_M(t) = A_0 \cos\Phi(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - A_0 \operatorname{sen}\Phi(t) \operatorname{sen}(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

nella quale i segnali modulanti

$$A_0 \cos\Phi(t) \text{ e } A_0 \operatorname{sen}\Phi(t)$$

hanno banda molto maggiore di B. In conclusione

$$\underline{B_{PM} \text{ e } B_{FM} \gg B} \qquad (8.13)$$

MODULAZIONI ESPONENZIALI A BANDA STRETTA (Stretta) (Narrow Band)

Consideriamo il caso in cui

$$\boxed{|\Phi(t)| << 1}$$

dalle (8.1.3) e (8.1.4), possiamo approssimare come segue

$$A_0 \cos \Phi(t) \simeq A_0 \cdot 1$$
$$A_0 \operatorname{sen} \Phi(t) \simeq A_0 \Phi(t)$$

$\begin{cases} \phi_\Delta x(t) & PM \\ 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\,d\alpha & FM \end{cases}$

allora il segnale modulato $X_M(t)$ risulta:

(8.14) $$X_M(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - A_0 \Phi(t) \operatorname{sen}(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

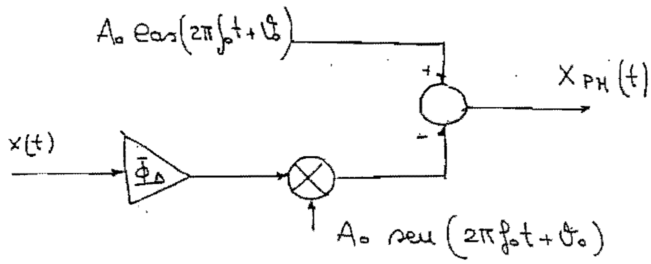
In frequenza, per le sole frequenze positive

(8.15) $$X_M(f) = \frac{A_0}{2} \delta(f - f_0) e^{j\theta_0} + j\frac{A_0}{2} \Phi(f - f_0) e^{j\theta_0}$$

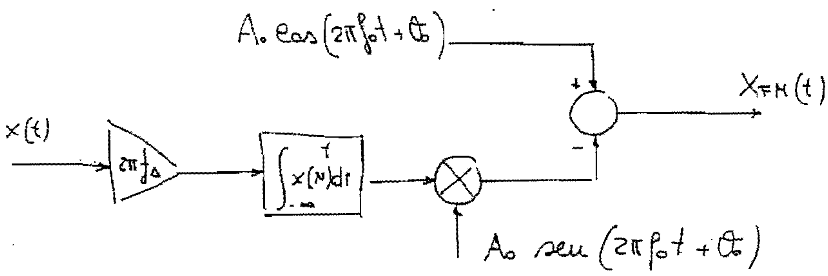
-- Di fatto dalla (8.14) si può vedere $X_M(t)$ come un segnale AM con portante cosinusoidale. Ricordando gli schemi di modulazione AM e ricordando che nei due casi:

$$FM \longrightarrow \Phi(t) = 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\,d\alpha$$
$$PM \longrightarrow \Phi(t) = \Phi_\Delta\, x(t)$$

si possono tracciare i seguenti schemi.



Schema 8.3
Modulatore NBPM



Schema 8.4
Modulatore NBFM

Il segnale della (8.14) si dice A BANDA STRETTA; a seconda della funzione $\Phi(t)$ si ha NBPM o NBFM.

BANDA DEI SEGNALI FM E PM

Sia $x_{FM}(t)$ un segnale modulato in frequenza nella forma

$$x_{FM}(t) = A_0 \cos\left[2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau + \Phi_0\right]$$

Se $x(t)$, cioè il segnale modulante è del tipo

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t)$$

nello spettro compaiono una serie di componenti armoniche eccedenti lo spettro del segnale modulante. Anche se il segnale ha banda limitata, modulando in FM la banda è teoricamente infinita.

Esistono delle relazioni (per la dim. vedi Carlson) approssimate che permettono di quantificare la banda.

$$\boxed{B_{FM} \simeq 2(f_\Delta + B)} \qquad (8.16)$$

detta FORMULA DI CARLSON. Una formula più precisa è la seguente

$$\boxed{B_{FM} \simeq 2(f_\Delta + 2B)} \qquad (8.17)$$

A seconda della qualità richiesta si sceglie una oppure l'altra relazione.

Esempio

Un segnale Audio di qualità ha una banda B di 15 kHz. A seconda della modulazione si ha

$$B_{AM} = 30\,kHz$$

$$\left.\begin{array}{l} B_{FM_1} \cong 180\,kHz \\ B_{FM_2} \cong 210\,kHz \end{array}\right\} \text{tipicamente con } f_\Delta = 75\,kHz,$$

per la modulazione FM vale la seguente :

$$\boxed{B_{FM} \cong 2\left(\Phi_\Delta + 1\right)B} \qquad (8.18)$$

DISPOSITIVI DI MODULAZIONE E DEMODULAZIONE FM

BLOCCO LIMITATORE

Sia $x_M(t)$ un segnale modulato; esprimendolo tramite componente in fase e in quadratura avremo

$$x_M(t) = x_c(t)\cos(2\pi f_0 t) + x_s(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) =$$
$$= \rho(t)\cos\left[2\pi f_0 t + \Phi(t)\right] = \rho(t)\cos(\vartheta(t))$$

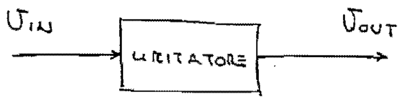
ponendo $\vartheta(t) = 2\pi f_0 t + \Phi(t)$. Osserviamo che

$$\rho(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)} \qquad \begin{array}{l} x_c(t) = A_0 \cos\Phi(t) \\ x_s(t) = A_0\,\mathrm{sen}\,\Phi(t)\end{array}$$

$$\Phi(t) = \mathrm{arctg}\,\frac{x_s(t)}{x_c(t)}$$

Un LIMITATORE è un blocco non lineare senza mem che ricevendo in ingresso un segnale $v_{IN} = x_M(t)$, fornisce in uscita v_{OUT} così definita

$$v_{OUT}(t) = A_L \cos\left[2\pi f_0 t + \Phi(t)\right]$$



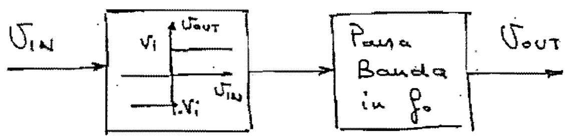
In particolare troviamo un blocco non lineare con la caratteristica $v_{OUT}(v_{IN})$ di figura, seguito da un filtro passa banda centrato in f_0.

Se

$$v_{IN} = \rho(t)\cos[\vartheta(t)]$$

in uscita

$$v_{OUT} = A_L\cos[\vartheta(t)]$$



Il primo blocco è uno "squadratore".
Fissiamo $t = \bar{t}_0$, in ingresso:

$$\rho(\bar{t})\cos\left[\vartheta(\bar{t})\right] \qquad (9.1)$$

l'ingresso è periodico rispetto a $\vartheta(t)$, allora anche v_{OUT} è periodico rispetto a $\vartheta(t)$ con periodo 2π (perché è un coseno).

Siccome il blocco è senza memoria, quindi, per valori uguali di ingresso si hanno valori uguali di uscita. Allora esprimiamo $v_{OUT}(t)$ come serie di Fourier di un segnale periodico:

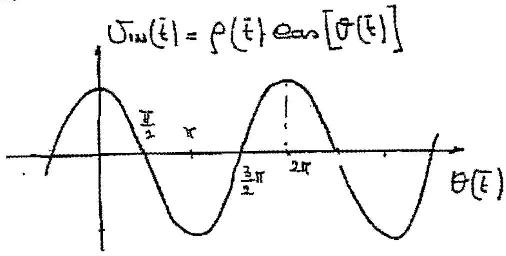
$$v_{OUT}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{j 2\pi \frac{n\theta}{2\pi}}$$

il periodo di v_{IN} rispetto a θ è 2π e la variabile rispetto alla quale si parla di periodicità è $\theta(t)$

$$v_{OUT}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn\theta} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cos\{n\theta + \arg[\ \ ]\}$$

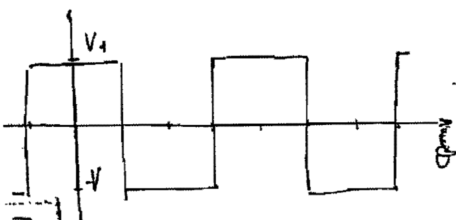
$$= a_0 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \cos\{n\theta + \arg(a_n)\} \ (*)$$

calcoliamo i coefficienti a_n:



$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{[2\pi]} v_{OUT}\, e^{-jn\theta}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V_1 e^{-jn\theta} d\theta - \int_{+\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} V_1 e^{-jn\theta} d\theta\right] =$$



$$= \frac{1}{2\pi}\left[V_1 \frac{e^{-jn\theta}}{-jn}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - V_1 \frac{e^{-jn\theta}}{-jn}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{V_1}{n}\frac{e^{jn\frac{\pi}{2}} - e^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2j} + \frac{V_1}{n\pi}\frac{e^{-jn\frac{3}{2}\pi} - e^{-jn\frac{\pi}{2}}}{2j}$$

$$\boxed{= \frac{V_1}{n\pi}\left[\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2} + e^{-j\frac{\pi}{2}n}\left(\frac{(-1)^n - 1}{2j}\right)\right]}$$

Calcoliamo alcuni dei coefficienti

$$a_1 = 2\frac{V_1}{\pi} \qquad a_2 = 0 \qquad a_3 = \frac{V_1}{3\pi}[-1-1] = -\frac{2}{3}\frac{V_1}{\pi} \quad \ldots$$

Riscrivendo $v_{OUT}(t)$:

$$v_{OUT}(t) = \frac{4V_1}{\pi}\cos[\theta(t)] + \frac{4}{3}\frac{V_1}{\pi}\cos[3\theta + \pi] + \ldots \qquad (9.2)$$

$(*) = \frac{4V_0}{\pi}\cos\theta + 2\sum a_n \cos(n\theta + \phi_n)$

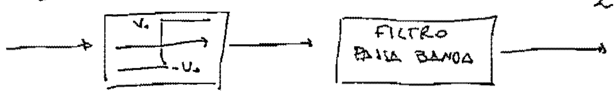
$\frac{4V_0}{\pi}\cos[\theta(t)] + 2\sum |a_n| \cos[n\theta(t) + \phi_n]$ $\qquad a_n = \begin{cases} \frac{2V_0}{\pi n} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$

LIMITATORE

È un oggetto che riceve in ingresso un oggetto

$A(t)\cos(2\pi f_0 t + \phi(t) + \theta_0) \xrightarrow{\boxed{\text{LIMIT}}} A\cos(2\pi f_0 t + \phi(t) + \theta_0)$

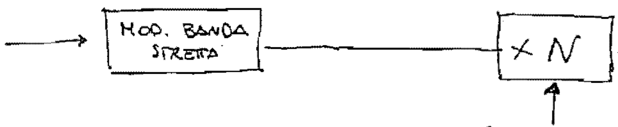
$A(t)\cos[\theta(t)]$ $\qquad 2\frac{2V_0}{\pi 5}\cos[5\,\theta(t)]$ (se per esempio ho $5f_0$)



MODULATORE BANDA LARGA

$x_p(t) = A_0\cos[2\pi f_0 t + \phi(t) + \theta_0] = A_0\cos\left[N\left(2\pi\frac{f_0}{N}t + \frac{\phi(t)}{N} + \frac{\theta_0}{N}\right)\right]$

$\frac{\phi(t)}{N} \ll 1$ $\qquad$ ↳ moltiplica la fase istantanea



MOD. banda stretta + moltiplicatore di fase istantanea

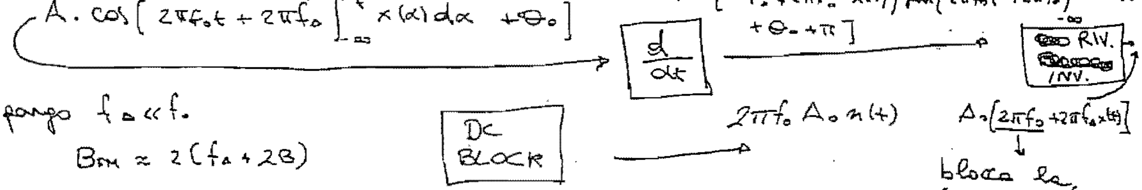
Vale per FM e PM.

Un altro modulatore, MA SOLO PER LE FM è il VCO

DEMODULATORE FM → AM

$A_0\cos\left[2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\,d\alpha + \theta_0\right]$

$A_0\left[2\pi f_0 + 2\pi f_\Delta\, x(t)\right]\sin\left[2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\,d\alpha + \theta_0 + \pi\right]$

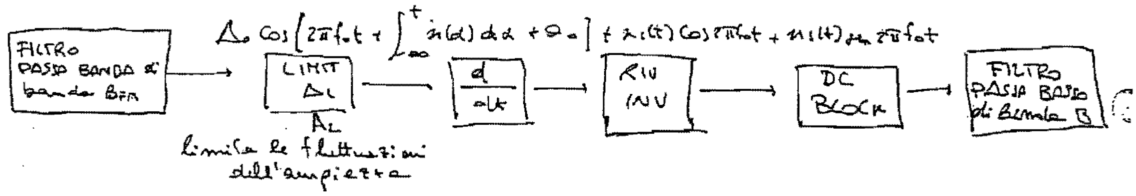


pongo $f_\Delta \ll f_0$

$B_{FM} \approx 2(f_\Delta + 2B)$

$2\pi f_\Delta A_0\, x(t)$ $\qquad A_0[2\pi f_0 + 2\pi f_\Delta x(t)]$ ↓ blocca la componente continua

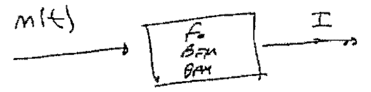
I due componenti principali sono il derivatore e il rivelatore di inviluppo



Il ... filtro riesce a eliminare componenti frequenziali del rumore.

Questi sono i 6 blocchi fondamentali di un DEMODULATORE FM

$A_0 \cos[2\pi f_0 t + \phi(t) + \theta_0] + n(t)$

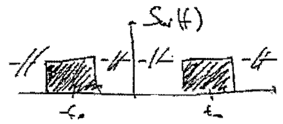


elimina le componenti del rumore al di fuori del segnale

$S_i = \frac{A_0^2}{2}$

I è considerato ~~il~~ il vero e proprio ingresso.

Vediamo N_i ...



$N_i = \left(\frac{N_0 B_{FM}}{2}\right) \cdot 2 = N_0 B_{FM}$ ↳ considero anche le frequenze negative

Scrivo il segnale dopo il filtro di front-end

$A_0 \cos[2\pi f_0 t + \phi(t) + \theta_0] + \underbrace{n_c(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - n_s(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t + \theta_0)}$ = (*)

L'inviluppo complesso lo scrivo con modulo e fase

$A_n(t)\cos[2\pi f_0 t + \phi_n(t) + \theta_0]$

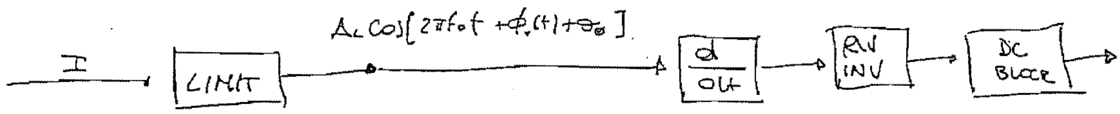
[$\tilde{n}(t) = n_c(t) + j n_s(t) = A_n(t)\, e^{j\phi_n(t)}$ $\quad n(t) = \mathrm{Re}[\tilde{n}(t) e^{j(2\pi f_0 t + \theta_0)}]$]

(*) $= A_r(t)\cos[2\pi f_0 t + \phi_r(t) + \theta_0]$

(il segnale è passabanda, il rumore è passab ⟹ la risultante è passabanda)

lo scrivo come $A_0 e^{j\phi(t)} + A_n(t) e^{j\phi_n(t)} = A_r(t)\, e^{j\phi_r}$

SOMMARE 2 SEGNALI SIGNIFICA SOMMARE I RISPETTIVI INVILUPPI COMPLESSI



dopo il derivatore...

$A_c[2\pi f_0 + \dot{\phi}_r(t)]\,\mathrm{sen}[2\pi f_0 t + \phi_r(t) + \theta_0 + \pi]$

dopo Riv inv...

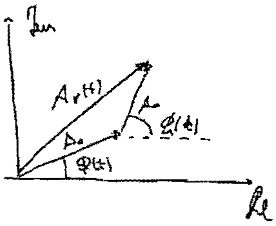
$A_c[2\pi f_0 + \dot{\phi}_r(t)]$

dopo DC BLOC...

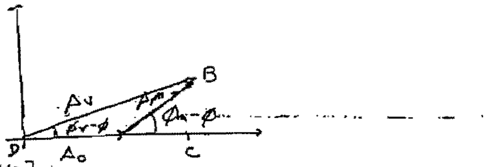
$A_c \dot{\phi}_r(t)$

Diagramma fasoriale.

1) lo schema funziona se lo FM + n(t)? $\phi_v(t)$ è proporzionale al segnale?



Se ruoto il diagramma di $\phi(t)$ mi ritrovo



$$\phi_v(t)-\phi(t) = \arctg \frac{A_n(t)\sin[\phi_n(t)-\phi(t)]}{A_0 + A_n\cos[\phi_n(t)-\phi(t)]} = \arctg\frac{BC}{DC}$$

$$\phi_v(t) = \phi(t)+\arctg\frac{BC}{DC}$$

Hp $\frac{S_i}{N_i} \gg 1$

Sole X, Y gaussiane indipendenti

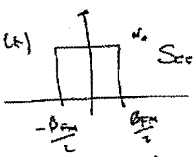
$R=\sqrt{X^2+Y^2}$ $A_n(t)$ Rayleigh

$\phi_n(t)$ uniforme

caso FM

$$A_c\dot\phi_v(t) = A_c\left[\dot\phi(t)+\frac{\dot n_s(t)}{A_0}\right] = A_c\left[2\pi f_\Delta x(t) + \frac{\dot n_s(t)}{A_0}\right]$$

densità di $n_s(t)$



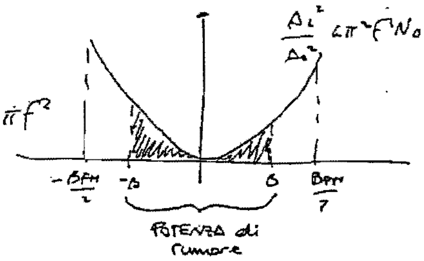
$S_{cc}(f) = S_{ss}(f)$

Vediamo

$n_s(t)$, $S_{ss}(f)$ → $\boxed{\frac{A_c}{A_0}\frac{d}{dt}}$ → $\frac{A_c}{A_0}\cdot\dot n_s(t)$

$H(f)=\frac{A_c}{A_0}j2\pi f$

$S_{ss}(f)\cdot\frac{A_c^2}{A_0^2}4\pi^2 f^2$



$A_c\dot\phi_v(t)$ → $\boxed{\text{PASSA BASSO } B}$ → $A_c 2\pi f_\Delta x(t)$ + rumore

$S_u = 4\pi^2 f_\Delta^2 A_c^2 P_x$

$$N_i = \frac{A_c^2}{A_0^2}4\pi^2 N_0\int_{-B}^{B} f^2\,df = \frac{A_c^2}{A_0^2}\frac{8}{3}\pi^2 B^3 N_0$$

Più piccola è la banda, minore è il rumore:

Efficienza spettrale significa inefficienza del rumore

$$\frac{\frac{S_u}{N_u}}{\frac{S_i}{N_i}} = \frac{3 f_\Delta^2 B_{FM} P_x}{B^3} \gg 1$$

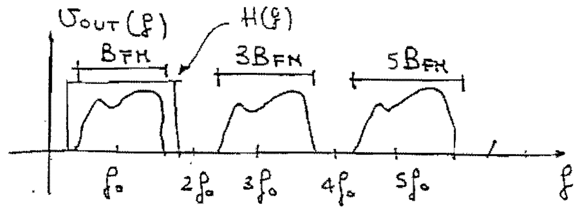
elevato guadagno di demodulazione

quindi:

$$v_{out}(t) = \frac{4V_1}{\pi}\cos\left[2\pi f_0 t + \Phi(t)\right] + \frac{4}{3}\frac{V_1}{\pi}\cos\left[2\pi(3f_0)t + 3\Phi(t) + \pi\right] + \dots$$

ogni addendo è un segnale FM o PM a seconda di $\Phi(t)$, centrato in kf_0, ovvero in frequenza (consideriamo la mod FM):

Supponendo come sempre $f_0 >> B_{FM}$ le prime repliche sono sicuramente non sovrapposte. Per estrarre lo spettro del segnale trasmesso occorre un filtro passa banda in f_0 di banda B_{FM}.

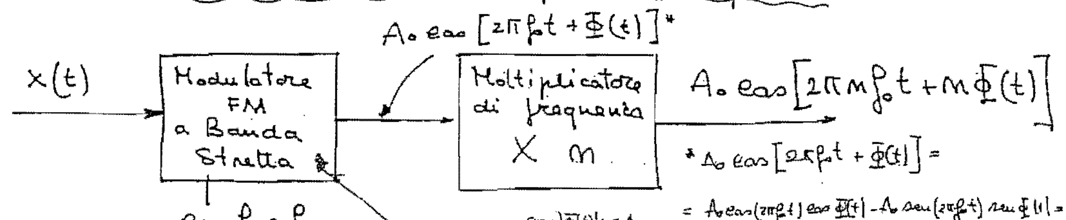


Osserviamo che se avessimo centrato il filtro in $m f_0$, con banda mB_{FM}, avremmo ottenuto un "moltiplicatore di frequenza".

Un segnale FM ha, nel tempo, ampiezza costante. Questa caratteristica, è corrisposta da alcune proprietà dello spettro. Il canale di fatto è un filtro che modifica lo spettro del segnale FM, quindi esso potrebbe (in realtà) essere ricevuto con ampiezza variabile. Questo è il motivo, per cui il limitatore considera $\rho(t)$ funzione del tempo.

MODULATORE FM CON MOD A BANDA STRETTA

Un modulatore a banda stretta, non è altro che un modulatore AM. Per ottenere una modulazione FM, è sufficiente inserire un moltiplicatore per m.



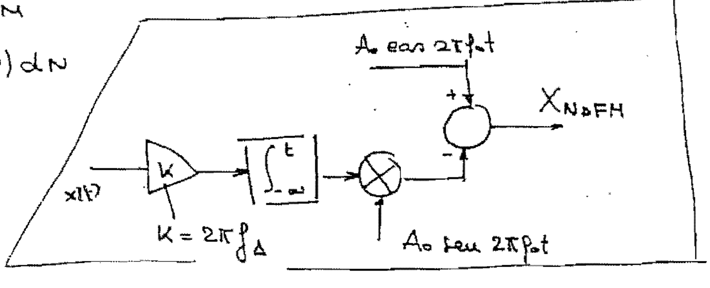
$^*A_0\cos[2\pi f_0 t + \Phi(t)] =$

$= A_0\cos(2\pi f_0 t)\cos\Phi(t) - A_0\,\text{sen}(2\pi f_0 t)\,\text{sen}\,\Phi(t) =$

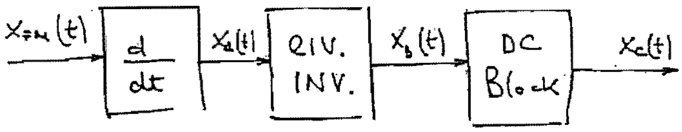
con $|\Phi(t)| << 1$ $\;\to\; = A_0\cos(2\pi f_0 t) - A_0\Phi(t)\,\text{sen}(2\pi f_0 t)$

Considerando la FM

$$\Phi(t) = 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$



Il segnale FM ricevuto sarà nella forma:



$$x_{FM}(t) = A_0 \cos\left[2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\nu)\, d\nu\right]$$

derivando rispetto al tempo:

$$\rightarrow \quad x_A(t) = A_0\left(2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta\, x(t)\right) \sin\left[2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\nu)\, d\nu\right] =$$

Il rilevatore di inviluppo preleva il modulo dell'inviluppo complesso, ovvero

$$\rightarrow \quad x_B(t) = \left| A_0\left(2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta\, x(t)\right)\right|$$

affinché x_{FM} sia passa banda $f_0 \gg f_\Delta$; allora sicuramente

$$A_0\left(2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta\, x(t)\right) > 0 \Longrightarrow x_B(t) = A_0\left(2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta\, x(t)\right)$$

↳ = una costante

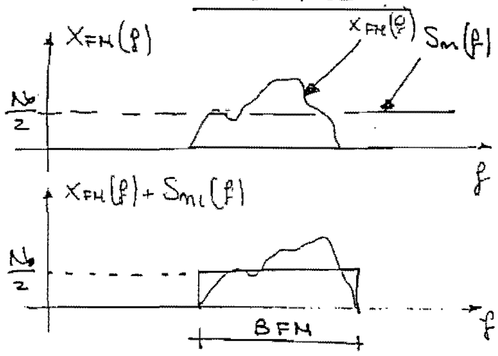
semplicemente rimane:

$$\rightarrow \quad x_C(t) = 2\pi f_\Delta\, x(t)$$

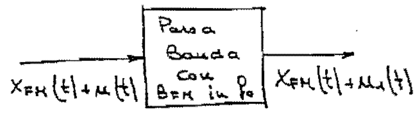
che è appunto proporzionale al segnale originale.

MODULAZIONI EXP IN PRESENZA DI RUMORE (AWGN)

Supponiamo di avere sovrapposto al segnale FM $x_{FM}(t)$, un rumore $n(t)$ (AWGN); esso ha densità spettrale di potenza costante pari a $N_0/2$. Allora il ricevitore FM deve essere dotato di un filtro frontale che elimini quanto più rumore sia possibile; tale filtro deve essere di banda B_{FM} in f_0, cosicché si ottiene il segnale $x_{FM}(t)$ sommato ad un rumore bianco filtrato $n_1(t)$. In ingresso



$$x_{FM}(t)+n(t) = A_0\cos\left[2\pi f_0 t + 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\,d\alpha\right] + n(t)$$



Il rumore filtrato è passa banda, quindi:

$$x_{FM}(t)+n_1(t) = A_0\cos\left[2\pi f_0 t+\Phi(t)\right] + A_n(t)\cos\left[2\pi f_0 t + \Phi_n(t)\right] =$$

$$\left(\begin{array}{l} n_1(t) = n_c^{(t)}\cos(2\pi f_0 t) - n_s^{(t)}\sin(2\pi f_0 t) \\ A_n(t) = \sqrt{n_c^2(t)+n_s^2(t)} \end{array}\right) \qquad \frac{S_I}{N_I} = \frac{A_0^2/2}{N_0 B_{FM}}$$

$P_{FM} = A_0^2/2$ non si perde da x

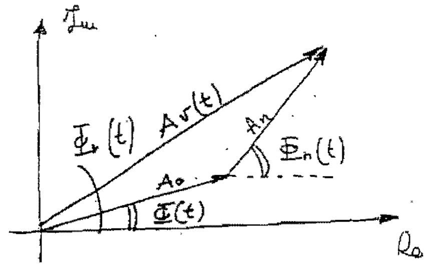
$S_n(f) = 2\left[\frac{N_0}{2}B_{FM}\right]$

$$= A_v(t)\cos\left[2\pi f_0 t + \Phi_v(t)\right] \qquad (9.3)$$

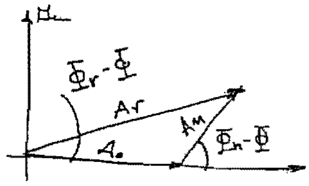
Ponendo in serie al filtro frontale un limitatore otteniamo in uscita $x_A(t)$ come segue:

$$x_A(t) = A_L\cos\left[2\pi f_0 t+\Phi_v(t)\right] \qquad (9.4)$$

Della (9.3), il termine $A_v(t)$ non ci interessa, quindi calcoliamo $\Phi_v(t)$ che è legato a $x(t)$. Osserviamo che il segnale espresso attraverso l'inviluppo complesso può essere rappresentato con un vettore di modulo A_0 e fase $\Phi(t)$; analogamente il rumore sarà un vettore di modulo $A_n(t)$ e fase $\Phi_n(t)$.



Sommando vettorialmente si ottiene un vettore di modulo $A_v(t)$ e fase $\Phi_r(t)$; ruotando il tutto in senso orario $\Phi(t)$ si ottiene il diagramma vettoriale di figura nel quale



$$\Phi_v(t)-\Phi(t) = \operatorname{arctg} \frac{A_n(t)\, sen[\Phi_n(t)-\Phi(t)]}{A_0 + A_n(t)\cos[\Phi_n(t)-\Phi(t)]}$$

le perché hanno le stesse statistiche

allora

$$\Phi_v(t) = \Phi(t) + \operatorname{arctg} \frac{A_n(t)\, sen[\Phi_n(t)-\cancel{\Phi(t)}]}{A_0 + \cancel{A_n(t)\cos[\Phi_n(t)-\Phi(t)]}}$$ per la c,

Supponiamo di avere in ingresso un rapporto segnale-rumore sufficientemente grande da garantire

$$\frac{S_i}{N_i} >> 1 \qquad (9.5)$$ (vettore segnale lungo, vettore rumore corto)

in questo modo $A_0 >> A_n$. (tra 0 e 2π)

La fase $\Phi_n(t)$ ha distribuzione uniforme, allora anche $\Phi_n(t)-\Phi(t)$ (per t fissato $\Phi(t)$ è costante) è anch'essa uniformemente distribuita.

Allora

$$\Phi_n(t)-\Phi(t) \qquad (9.6)$$

In sostanza da $n_c(t)$ e $n_s(t)$, che sono due var. casuali gaussiane, si estraggono due variabili casuali $A_n(t)$ e $\Phi_n(t)$

è statisticamente equivalente a $\Phi_n(t)$; inoltre

$$A_n(t)\, sen(\Phi_n(t)) = n_s(t)$$

allora per l'espressione (9.5) e per l'osservazione (9.6), si può dire

$$\Phi_v(t) = \Phi(t) + \operatorname{arctg} \frac{n_s(t)}{A_0} \simeq$$ sempre per la (9.5)

$$\simeq \Phi(t) + \frac{n_s(t)}{A_0}$$

Riscrivendo la (9.4), si ottiene

$$x_R(t) = A_c \cos(2\pi f_0 t + \Phi_v(t)) =$$
$$= A_c \cos\left(2\pi f_0 t + \Phi(t) + \frac{n_s(t)}{A_0}\right)$$

inserendo ora un derivatore, un rivelatore di inviluppo e un blocco per eliminare la "continua" otteniamo:

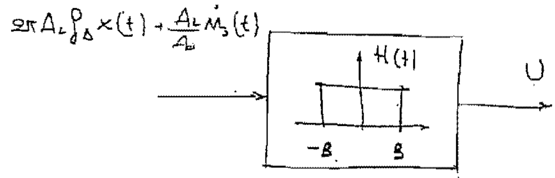
$$x_B(t) = \frac{d}{dt}\, x_A(t) = A_L\left[2\pi f_0 + \dot{\Phi}(t) + \frac{\dot{m}_s(t)}{A_0}\right] \mathrm{sen}(\quad) =$$

$$= -A_L\left[2\pi f_0 + 2\pi f_\Delta x(t) + \frac{\dot{m}_s(t)}{A_0}\right] \mathrm{sen}(\quad)$$

quindi $x_C(t)$ risulta

$$x_C(t) = -2\pi A_L f_\Delta\, x(t) + \frac{A_L}{A_0}\,\dot{m}_s(t)$$

A questo punto inseriamo un filtro passa basso di banda B, otteniamo come rapporto segnale rumore in uscita:



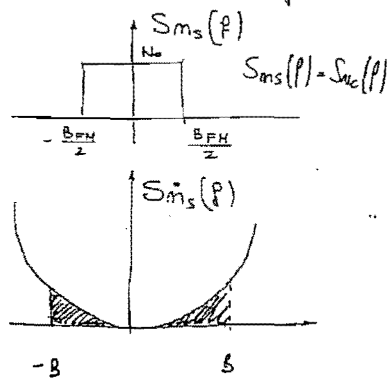
$$N_U = \int_{-B}^{B} N_0\, 4\pi^2 f^2\, df =$$

$$= 8 N_0 \pi^2 \int_0^B f^2\, df =$$

$$= 8\pi^2 N_0\, B^3/3$$

Ricordiamo che noto $S_{m_s}(f)$, derivando

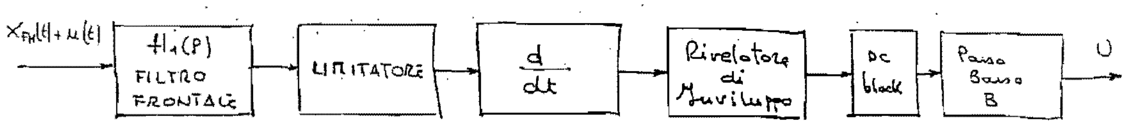
$$S_{\dot{m}_s}(f) = 4\pi^2 f^2 S_{m_s}(f)$$



Quindi

$$\frac{S_U}{N_U} = \frac{4\pi^2 f_\Delta^2\, P_x A_L^2}{8\pi^2 N_0\, B^3/3\ \frac{A_L^2}{A_0^2}} = \frac{3 f_\Delta^2 P_x A_0^2}{2 N_0 B^3}$$

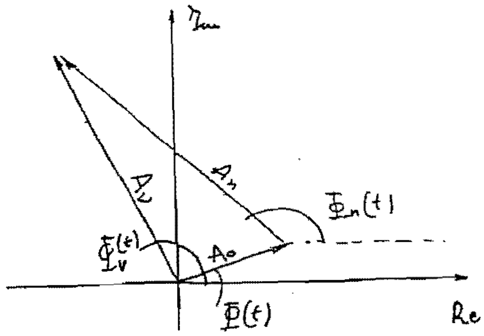
In sostanza lo schema del DEMODULATORE FM A LARGA BANDA risulta il seguente



Vediamo cosa succede nell'ipotesi di rumore preponderante rispetto al segnale in ingresso: $\frac{S_i}{N_i} \ll 1$

Analizziamo il diagramma fasoriale.

In questo caso se Φ_n varia, non esiste legame fra $\Phi(t)$ e $\Phi_v(t)$, quindi il segnale è praticamente "scomparso" rispetto al rumore.

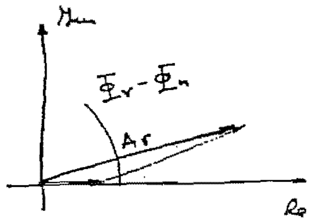


Nei ricevitori FM come quello appena visto esiste il cosiddetto EFFETTO SOGLIA.

In sostanza, esiste un valore minimo di rapporto S/N in ingresso ~~al di sotto del~~ quale ~~scompare la~~ relazione fra Φ_v e Φ. La soglia si indica con

$$\left(\frac{S_i}{N_i}\right)_{th} = \text{Soglia S/N}$$

Osservazione: Se tracciassimo il diagramma fasoriale sommando il fasore del rumore al fasore del segnale, avremmo ottenuto



$$\Phi_v(t) = \Phi_n(t) + \operatorname{arctg} \frac{A_o \operatorname{sen}[\Phi(t) - \Phi_n(t)]}{A_n + A_o \cos[\Phi(t) - \Phi_n(t)]}$$

In questo caso è evidente che lavorando sotto soglia $S_i < N_i$, si possono trascurare tutti i termini che riguardano il segnale e si ottiene.

$$\Phi_v(t) \cong \Phi_n(t) + \operatorname{arctg} \frac{A_o(t) \operatorname{sen} \Phi_n(t)}{A_n(t)}$$

Nota. Il rapporto Segnale-Rumore si misura in dB. Siccome S/N è il rapporto fra due potenze

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10 \log_{10} \frac{S}{N}$$

Se anziché esprimere il rapporto S/N in potenza venisse espresso in ampiezza, avremmo

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 20 \log_{10} \frac{S}{N} \rightarrow \text{Ampiezze.}$$

Se ad esempio segnale S e rumore N fossero sinusoidali, $S = \frac{A_o^2}{2}$ $N = \frac{A_n^2}{2}$

allora
$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10 \log \frac{S}{N} = 10 \log_{10} \left(\frac{A_o}{A_n}\right)^2 =$$
$$= 20 \log_{10} \left(\frac{A_o}{A_n}\right)$$

Quando si parla di banda a -3 dB si parla in termini di ampiezza

$$20 \log_{10} \frac{S_1}{S_2} = -3\,dB \Rightarrow 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2} = -3\,dB$$

Allora $\frac{S}{S_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{2}$

la banda a -3dB si dice anche BANDA A METÀ POTENZA.

FM a Banda Stretta

FM a Banda Stretta

Il segnale $x_{FM}(t)$ a BANDA STRETTA è nella forma:

$$x_{FM}(t) = A_o \cos(2\pi f_o t) - \Phi(t) A_o \sin(2\pi f_o t)$$
$$\Phi(t) = 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\nu)\, d\nu$$

anche in questo caso supponiamo la sovrapposizione di un rumore $n(t)$:

$$n(t) = n_c(t) \cos(2\pi f_o t) - n_s(t) \sin(2\pi f_o t)$$

con il filtro frontale si ottiene un rumore $n_1(t)$

$$x_{FM}(t) + n_1(t) = A_o \cos(2\pi f_o t) - \Phi(t) A_o \sin(2\pi f_o t) +$$
$$n_c(t) \cos(2\pi f_o t) - n_s(t) \sin(2\pi f_o t)$$

con un "demodulatore sincrono" si estrae la componente te in quadratura

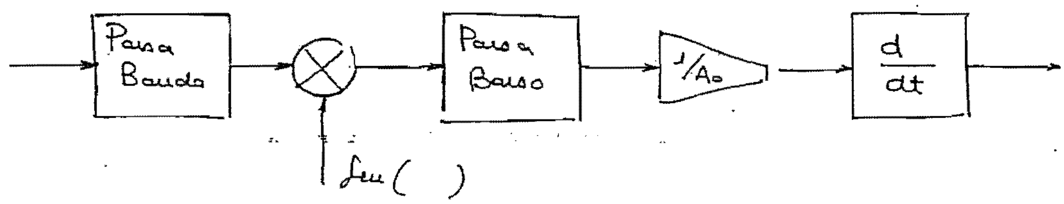
$$\Phi(t) + m_s(t)$$

eventualmente si può attenuare, quindi derivando si ottiene:

$$\frac{d}{dt}\left[\Phi(t) + \frac{m_s(t)}{A_0}\right] =$$

$$= 2\pi f_\Delta x(t) + \frac{m_s(t)}{A_0}$$

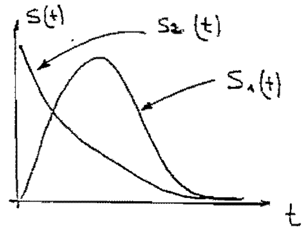
Lo schema di riferimento è il seguente.



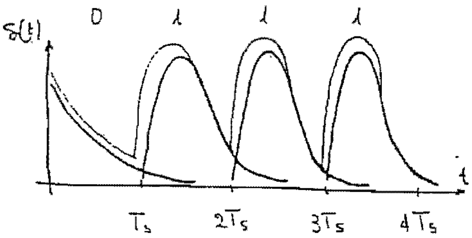
MODULAZIONI NUMERICHE

INTRODUZIONE

Nelle trasmissioni numeriche viene stabilito un alfabeto di simboli finito; ciascuno di questi "caratteri" è associato ad una informazione. In generale ciascun simbolo potrebbe essere costituito da un particolare segnale $s_i(t)$ con una propria forma d'onda.
Ad esempio in una codifica binaria avremmo un segnale $s_1(t)$ associato all'uno logico e un segnale $s_0(t)$ associato allo zero logico (vedi figura a lato).



Ovviamente trasmettitore e ricevitore conoscono l'alfabeto stabilito e si decide, in base al segnale ricevuto, quale dei simboli è stato trasmesso.
Il compito del ricevitore è proprio quello del DECISORE; tanto più le forme d'onda sono diverse fra loro tanto più facile sarà riconoscere la forma d'onda trasmessa anche se deformata dalla presenza di rumore.

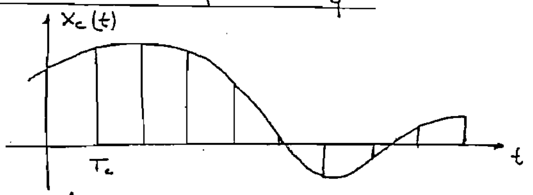


Ogni segnale associato ad un carattere viene trasmesso ad una distanza T_s detta INTERVALLO DI SEGNALAZIONE (indicato con I o D). In generale il segnale $s_i(t)$ analogico ha durata superiore all'intervallo di segnalazione; come noto infatti per avere durata limitata occorre banda illimitata.
L'impiego di un alfabeto risulta utile anche in termini di immunità al rumore. Consideriamo ad esempio un sistema binario al quale associamo allo zero $s_0(t)$ e all'uno $s_1(t)$, notiamo che anche in presenza di rumore AWGN

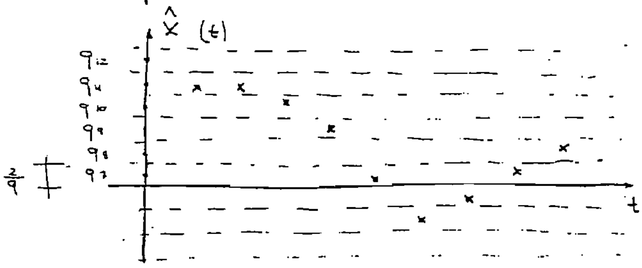
l' intelleggibilità dell' informazione non è compromessa. Metodi ancora più efficienti prevedono codifiche MULTILIVELLO che associano a ciascun carattere più segnali. In altri casi si inseriscono codifiche per l'individuazione e la correzione degli errori.

MODULAZIONE A CODIFICA DI IMPULSI (PCM)

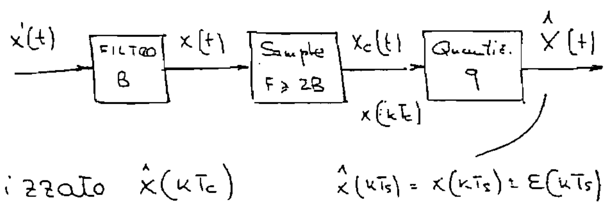
Si consideri un segnale analogico $x(t)$. Per prima cosa viene eseguito il CAMPIONAMENTO: come noto, se $x(t)$ ha banda B (ottenibile comunque con operazioni di prefiltraggio), rispettando il teorema di Shannon (condizione di Nyquist $F \geq 2B$), è possibile ricostruire $x(t)$ a partire dal segnale campionato. Dopo il campionamento $x_c(t)$ è un segnale tempo discreto. La fase successiva consiste in una discretizzazione delle ampiezze ed è detta QUANTIZZAZIONE. L'intervallo dell'ampiezza viene suddiviso in q fasce $q_1, q_2, \dots, q_q$ di ampiezza $2/q$ che si estende da $q_i + \frac{1}{q}$ a $q_i - \frac{1}{q}$. Nella fase di quantizzazione ogni campione viene ricondotto al valore q_i più vicino. Per come sono costruite le fasce si può avere un errore detto ERRORE DI QUANTIZZAZIONE, che può valere al più $\pm \frac{1}{q}$.



In ricezione, la ricostruzione viene fatta sul segnale quantizzato $\hat{x}(kT_c)$. L'errore commesso in ricostruzione essendo quello di quantizzazione, è facilmente quantificabile e riducibile, perché come già accennato vale $\pm \frac{1}{q}$



La fase di quantizzazione è seguita dalla codifica: si associa a ciascun campione quantizzato $\hat{x}(kT_c)$ un simbolo o segnale; se abbiamo scelto di quantizzare con q livelli, occorrono q segnali per rappresentare tutto $x(t)$.



Nella maggior parte dei casi si impiega il sistema binario. Ciascun simbolo o segnale è costituito da una parola a ν bit. In sostanza per ottenere la rappresentazione di q livelli attraverso q segnali o q parole, occorrono ν bit tali che

$$q = 2^{\nu}$$

ovvero

$$\boxed{\nu = \log_2 q}$$

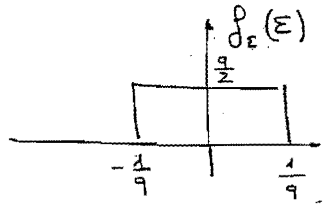
Rumore di Quantizzazione

Come già accennato ciascun livello di quantizzazione è centrato intorno al valore q_i con ampiezza $2/q$. Il segnale PCM ricevuto dopo la trasmissione sarà: $x_c(t)$

$$\boxed{\hat{x}(kT_c) = x(kT_c) \pm \varepsilon(kT_c)}$$

nella quale $\varepsilon(kT_c)$ è detto appunto RUMORE DI QUANTIZZAZIONE. Esso è descrivibile mediante una variabile casuale uniformemente distribuita fra $-\frac{1}{q}$ e $\frac{1}{q}$, con potenza

$$E\{\varepsilon^2\} = N_0 = \int_{-\frac{1}{q}}^{\frac{1}{q}} \varepsilon^2 f_\varepsilon(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{q}{\cancel{2}}\cancel{2}\int_0^{\frac{1}{q}} \varepsilon^2\, d\varepsilon = \boxed{\frac{1}{3q^2}}$$



Nota: Trasmissioni Telefoniche

La modulazione PCM è impiegata nelle trasmissioni telefoniche e si pone:

$$q = 256$$
$$T_c = 125\ \mu sec$$
$$B = 8\ kHz.$$

$$r = \frac{1}{T} = \frac{8}{125\ \mu sec} = 64\ kbit/sec$$

Siccome q=256 occorrono 8 bit per ciascun campione. Per trasmettere 8 bit prima che venga rilevato il campione successivo occorre un intervallo di segnalazione T

Osserviamo che essendo $T = 1/64$ Kbit/sec la banda del segnale PCM risulta

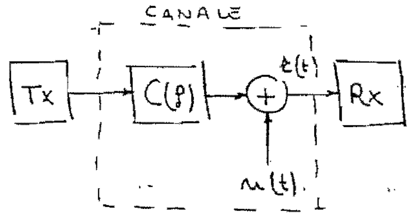
intervallo associato alla tx di un singolo bit.

$$B = \frac{1}{2T} = 32 \text{ KHz}$$

Con una mod AM avremmo avuto $B_{AM} = 16$ KHz

TRASMISSIONI NUMERICHE IN BANDA BASE

In generale un sistema di trasmissione, può essere schematizzato come segue.



Il canale di trasmissione è di fatto un filtro passa banda $C(f)$ che introduce un rumore $n(t)$ AWGN.

In una trasmissione numerica viene stabilito un alfabeto M-ario A che in generale sarà del tipo:

$$\boxed{A = \{S_i(t)\}_{i=1}^{M} = \{S_1(t), S_2(t), \ldots, S_M(t)\}}$$ con probabilità p_i

costituito appunto da M simboli o segnali. A ciascuno degli M segnali è associata una probabilità di essere trasmesso $\boxed{p_i}$.

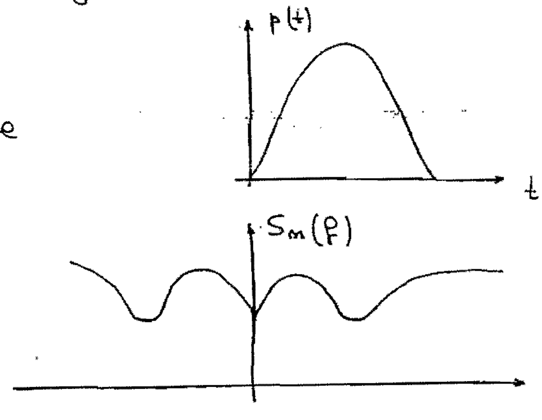
Consideriamo il caso di una trasmissione "one shot", nella quale si inoltra sul canale un simbolo alla volta. Il ricevitore conosce il set di caratteri e le relative probabilità e, acquisito il segnale $r(t)$, deve decidere a quale informazione associarlo; in altri termini deve stabilire a quale segnale $S_i(t)$ corrisponde $r(t)$. Ammesso che la decisione $S_i(t)$ sia corretta, il rumore sovrappostosi nel canale non ha più alcuna valenza e può ritenersi eliminato. In questo senso le trasmissioni numeriche risultano più "robuste" di quelle analogiche.

Osservazione: Se per le tx analogiche su lunghe distanze, la rigenerazione del segnale comporta una amplificazione del rumore fino a quel punto introdotto, nelle tx numeriche la rigenera zione dei livelli logici permette la discriminazione del rumore.

Consideriamo un generico impulso p(t) avente un proprio andamento e una durata D. Supponiamo di sommare ad esso il processo n(t) che rappresenta il rumore introdotto dal canale. Supponiamo inoltre che tale rumore sia gaussiano ma "colorato" (non bianco) con densità spettrale di potenza $S_n(f)$ che, per quanto detto, non è più costante, ma a simmetria pari per la gaussianità.

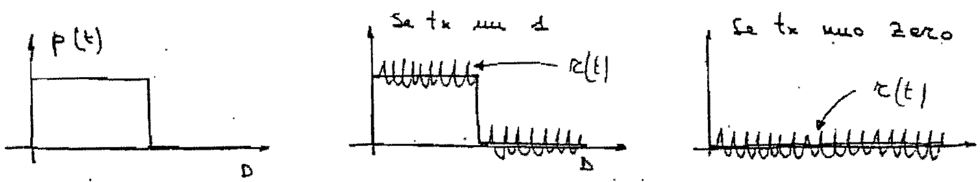
$$\boxed{r(t) = p(t) + n(t)}$$

Trasmettiamo sul canale l'impulso che, sommato al rumore, costituisce r(t).

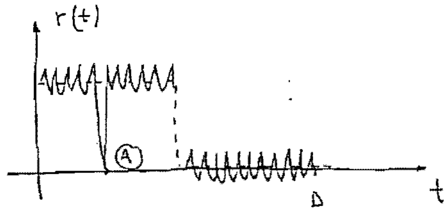


(Questo è il caso delle strutture radar nelle quali, per verificare la presenza o meno di un oggetto, si trasmette p(t) e si attende una risposta; se il bersaglio è presente si riceve p(t), mentre in caso contrario solo il rumore.)

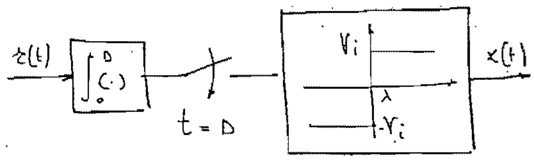
Il problema consiste quindi nel decidere se nel segnale r(t) è presente o meno l'impulso p(t). Questa situazione è quella che si presenta nel caso delle trasmissioni binarie. Si associa all'uno l'impulso rettangolare p(t) mentre allo zero si associa il valore nullo di tensione. Il ricevitore dovrà stabilire se in r(t) è presente o meno p(t). Ricordiamo che il rumore è a media nulla.



Vediamo alcune strategie di decisione.
Si potrebbe pensare di leggere il valore di tensione in un generico istante dell'intervallo D ma, se per coincidenza scegliessimo A si verificherebbe un errore. Una soluzione certamente più efficiente consiste nel calcolare l'area sottesa da r(t) in un certo istante.

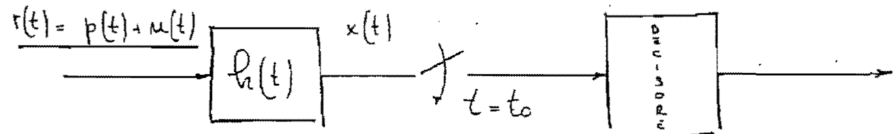


Ad esempio integriamo r(t) dall'istante di ricezione all'istante pari alla durata D; nell'istante t = D leggiamo il valore di tale integrale.



Se fosse stato ricevuto uno zero l'integrale risulterebbe pressoché nullo, in caso contrario assumerebbe un certo valore. A questo punto quindi basterebbe un decisore a soglia per produrre un'uscita consona alla decisione. Il caso della tx binaria è un caso particolare nel quale i due eventi (0 e 1) sono equiprobabili.

La questione può essere generalizzata, cercando un filtro frontale h(t) che massimizza il rapporto S/N in ingresso al ricevitore



Supponiamo il filtro h(t) lineare. Allora si può affermare che:

$$x(t) = r(t) \otimes h(t) = \overbrace{p(t) \otimes h(t)}^{x_p(t)} + \overbrace{n(t) \otimes h(t)}^{x_n(t)} = $$
$$= x_p(t) + x_n(t) \qquad (10.1)$$

nella quale $x_p(t)$ è un segnale determinato, mentre

$x_n(t)$ è un processo stocastico. Il rapporto segnale rumore (indicato in questo caso con SNR) risulta:

$$\boxed{SNR \triangleq \frac{x_p^2(t_0)}{\mathbb{E}\{x_n^2(t_0)\}} = \frac{x_p^2(t_0)}{\mathbb{E}\{x_n^2(t)\}} \quad (10.2)}$$

(perché $n(t)$ è gaussiano)

Il filtro $h(t)$ deve essere progettato in modo da massimizzare il rapporto SNR nell'istante t_0, quindi è essenziale che il campionamento in t_0 sia perfettamente sincronizzato. Dalla relazione (10.2) passando in frequenza abbiamo:

$$\cancel{X_p(f)} = P(f)\,H(f) \quad \text{con} \quad x_p(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_p(f)\, e^{j2\pi f t_0}\, df =$$

$$(10.3) \qquad = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f)\,H(f)\, e^{j2\pi f t_0}\, df$$

mentre per il processo

$$X_n(f) = S_n(f)\,|H(f)|^2$$

quindi:

$$\mathbb{E}\{x_n^2(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f)\,|H(f)|^2\, df$$

La (10.2) diviene:

$$SNR \triangleq \frac{x_p^2(t_0)}{\mathbb{E}\{x_n^2(t)\}} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} P(f)\,H(f)\, e^{j2\pi f t_0}\, df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f)\,|H(f)|^2\, df} \quad (10.4)$$

Nota: Si ricordi la DISUGUAGLIANZA DI S

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\varphi^*(x)\, dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^*(x)|^2\, dx$$

Nella quale $\psi(x)$ e $\varphi(x)$ sono due generiche funzioni complesse. Osserviamo che l'uguaglianza vale se $\varphi(x) = k\,\psi^*(x)$

Applicando la disuguaglianza di Swartz al numeratore della (10.4)

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X_p(f)\, e^{j2\pi f t_0}\, df\right]^2 = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} P(f)\, H(f)\, e^{j2\pi f t_0}\, df\right|^2 =$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(f)}{\sqrt{S_n(f)}}\, H(f)\sqrt{S_n(f)}\, e^{j2\pi f t_0}\, df\right|^2 \qquad (10.5)$$

poniamo

$$\varphi^*(x) = H(f)\sqrt{S_n(f)} \qquad (10.6.1)$$

$$\psi(x) = P(f)/\sqrt{S_n(f)}\; e^{j2\pi f t_0} \qquad (10.6.2)$$

quindi:

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(f)}{\sqrt{S_n(f)}}\, e^{j2\pi f t_0}\, H(f)\sqrt{S_n(f)}\, df\right|^2 \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{P(f)}{\sqrt{S_n(f)}}\, e^{j2\pi f t_0}\right|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} \left|H(f)\sqrt{S_n(f)}\right|^2 df$$

Sostituendo nella (10.2)

$$|e^{j2\pi f t_0}|^2 = 1$$

$$SNR \triangleq \frac{X_p^2(t_0)}{E\{X_n^2(t)\}} \le \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|P(f)|^2\, |e^{j2\pi f t_0}|^2}{S_n(f)}\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|P(f)|^2}{S_n(f)}\, df \qquad (10.7)$$

volendo massimizzare SNR si dimensiona $h(t)$ in modo che valga l'uguaglianza, quindi

$$\varphi(x) = K\,\psi(x) \qquad (10.8.1)$$

$$H^*(f)\sqrt{S_n(f)} = K\,\frac{P(f)\, e^{j2\pi f t_0}}{\sqrt{S_n(f)}} \qquad (10.8.2)$$

ovvero

$$H(f) = K\,\frac{P^*(f)\, e^{-j2\pi f t_0}}{S_n(f)} \qquad (10.9)$$

questo filtro, così costruito, si dice FILTRO ADATTATO che è quello che massimizza SNR nell'istante voluto.

Nel caso delle normali trasmissioni $m(t)$ e AWGN, quindi la sua densità spettrale di potenza è costante

$$\boxed{S_n(f) = \frac{N_0}{2}}$$

quindi si ha

$$SNR_{max} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|P(f)|^2}{S_n(f)}\, df = \frac{2}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2\, df$$

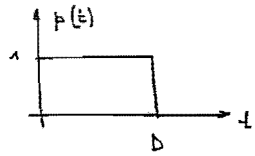
che, per il teorema di Parseval vale

$$\boxed{SNR_{max} = \frac{2E_p}{N_0}}$$

nella quale E_p è l'energia posseduta dall'impulso.

CORRELATORE (IN ALTERNATIVA AL FILTRO ADATTATO)

~~Si consideri l'impulso p(t) rettangolare di figura~~



Supponendo $S_n(f) = 1$, dalla (10.9)

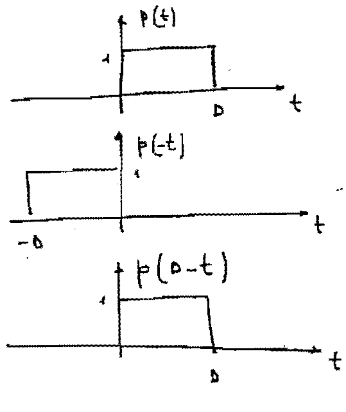
$$H(f) = k\, P^*(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$$

posto $k = 1$

$$h(t) = p(t_0 - t) \quad \text{con } t_0 = \Delta \qquad h(t) = p(\Delta - t)$$

Se $r(t)$ è il segnale ricevuto in uscita dal filtro si ha

una convoluzione!!!



$$r(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\nu)\, h(t_0 - \nu)\, d\nu =$$

con $t = t_0$

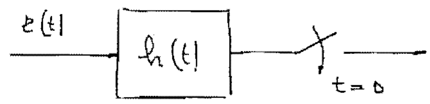
$$h(t_0 - \nu) = p(\cancel{t_0} - \cancel{t_0} + \nu)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} r(\nu)\, p(\nu)\, d\nu =$$

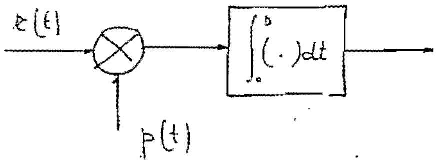
$$= \int_0^{\Delta} r(\nu)\, p(\nu)\, d\nu =$$

$$= \int_0^{\Delta} \left[p(\nu) + n(\nu)\right] p(\nu)\, d\nu = \underbrace{\int_0^{\Delta} p^2(\nu)\, d\nu}_{E_p} + \int_0^{\Delta} n(\nu)\, p(\nu)\, d\nu$$

Interpretando la relazione appena ottenuta, possiamo tracciare i seguenti schemi



FILTRO ADATTATO



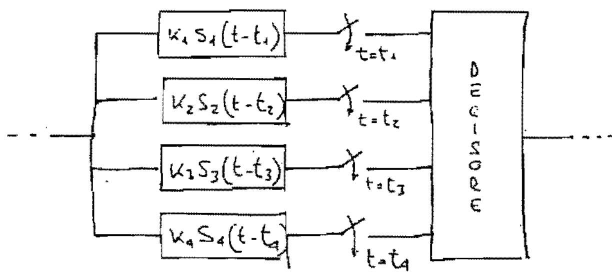
CORRELATORE

SISTEMA DI RICEZIONE NUMERICA

Consideriamo la modalità di trasmissione "one shot".
I segnali trasmessi sono scelti in un alfabeto A

$$A = \{S_i(t)\}_{i=1}^{M} \quad \text{ciascuno con probabilità} \quad \{p_i\}_{i=1}^{M}$$

Se consideriamo il caso con 4 simboli ($M=4$) il ricevitore può essere realizzato con 4 filtri ciascuno, adattato ad uno dei simboli, come segue:



Sia T l'intervallo di segnalazione e D la durata massima di ogni segnale

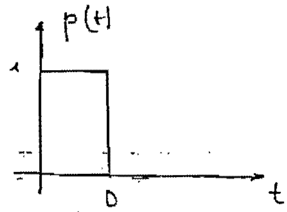
Per le trasmissioni numeriche in banda base vengono impiegate, principalmente, due tipi di modulazione: PAM (Pulse Amplitude Modulation) e PPM (Pulse Position Modulation).

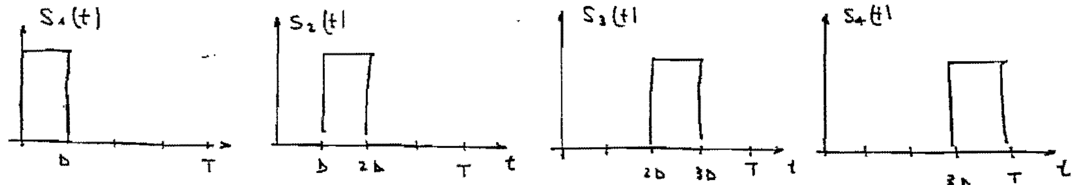
1. Modulazione PPM

Siano M i segnali necessari; scelto un impulso di durata D, ciò che viene modulato, dal segnale da trasmettere, è la posizione di tale impulso all'interno dell'intervallo di segnalazione.
Per questo motivo l'intervallo T deve necessariamen

te essere multiplo di D: $T = MD$

nella quale M è il numero di caratteri presenti nell'alfabeto. Se $p(t)$ è un impulso rettangolare (vedi figura) e si vuole realizzare una PPM quaternaria ($M = 4$) i possibili segnali da trasmettere sono:





Analizziamo come può essere ridotto lo schema del ricevitore. Nello schema generale $t_1 = D$, $t_2 = 2D$, $t_3 = 3D$ e $t_4 = 4D = T$ ma

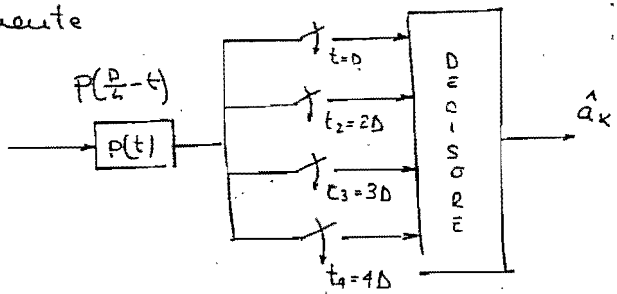
$\frac{D}{4} = t$

$$S_1(D-t) = p(t)$$
$$S_2(2D-t) = p(t)$$
$$S_3(3D-t) = p(t)$$
$$S_4(4D-t) = p(t)$$

allora i quattro filtri vengano sostituiti da uno unico* e lo schema diviene il seguente

SCHEMA PPM

*siccome $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 1$ allora ho 4 filtri uguali:



2. Modulazione PAM

In questo caso scelta l'impulso $p(t)$, il segnale da trasmettere ne modula l'ampiezza.
Anche in questo caso analizziamo come si riduce lo schema generale nel caso della modulazione PAM.
La condizione di adattamento dei filtri impone

una proporzionalità con l'impulso; allora scegliamo i coefficienti K_1, K_2, K_3 e K_4 arbitrari pari a 115

$$K_1 = 1 \qquad K_2 = \frac{1}{3} \qquad K_3 = -1 \qquad K_4 = -\frac{1}{3}$$

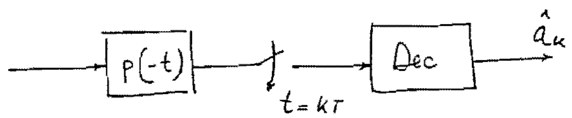
$$\boxed{K_i = \frac{1}{a_i}}$$

inoltre fissiamo i tempi di campionamento t_1, t_2, t_3 e t_4 nulli, quindi avremo

$$\left.\begin{aligned} K_1 S_1(t_1 - t) &= S_1(-t) \\ K_2 S_2(t_2 - t) &= \frac{1}{3} S_2(-t) \\ K_3 S_3(t_3 - t) &= -S_3(-t) \\ K_4 S_4(t_4 - t) &= -\frac{1}{3} S_4(-t) \end{aligned}\right\} = p(-t)$$

Sulla base di ciò lo schema generale può essere ridotto a

SCHEMA PAM

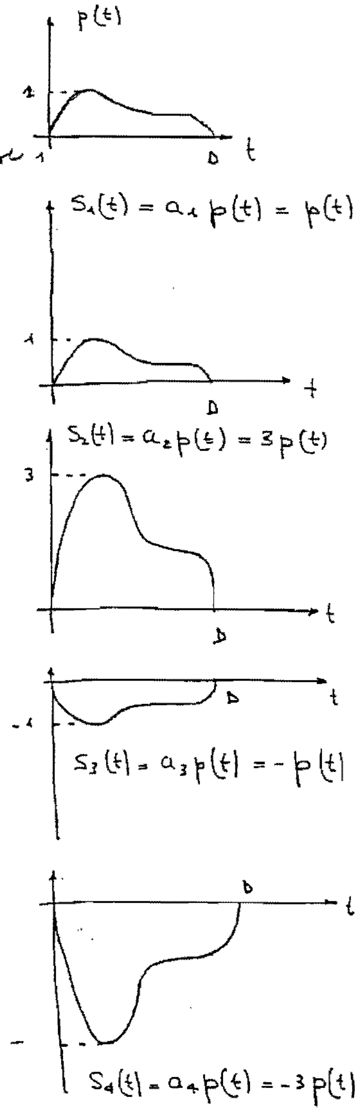


MODULAZIONE PAM (Pulse Amplitude Modulation)

Il segnale $s_i(t)$ trasmesso da un tx PAM può essere scritto nella forma: $\boxed{S_i(t) = a\, p(t)}$

nella quale p(t) è l'impulso scelto e "a", detto SIMBOLO, dipende dal carattere che si vuole trasmettere ed è scelto fra un alfabeto prefissato. Ciascun simbolo a_i ha una probabilità di essere trasmesso p_i, perciò è una variabile casuale discreta.

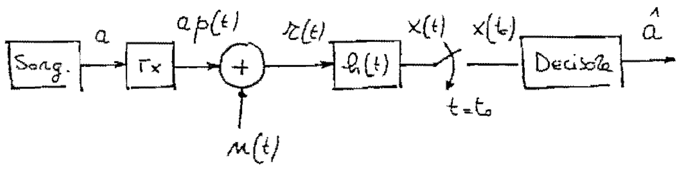
Supponiamo di avere un alfabeto di quattro caratteri; scelto p(t), si può definire il simbolo a come segue



$$a = \begin{cases} a_1 = 1 & \text{con } p_1 \leftarrow \text{probabilità del simbolo 1} \\ a_2 = 3 & \text{con } p_2 \\ a_3 = -1 & \text{con } p_3 \\ a_4 = -3 & \text{con } p_4 \end{cases}$$

(simbolo)

Il sistema tx, rx e canale, può essere riassunto come segue:

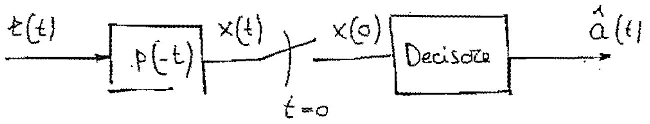


Nel quale il filtro h(t) è un filtro adattato, descritto dalla relazione

$$h(t) = K\, p(t_0 - t)$$

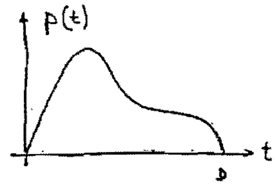
come noto dalle semplificazioni fatte in precedenza si può scrivere

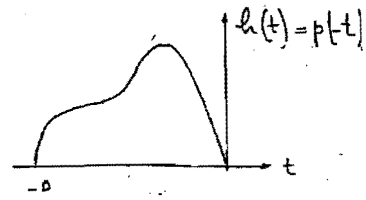
$$h(t) = p(-t) \quad \text{con } t_0 = 0$$



Consideriamo un sistema binario, cioè un alfabeto composto da due soli caratteri; posti i due simboli $a_1 = 1$ con probabilità P e $a_2 = -1$ con probabilità $(1-P)$, la variabile casuale a è discreta e così definita

$$a = \begin{cases} a_1 = 1 \text{ con } P \\ a_2 = -1 \text{ con } (1-P) \end{cases}$$





Scelto l'impulso $p(t)$, si definisce automaticamente il filtro $h(t)$.
Osserviamo che in questo caso (vedi figura) (h(t) potrebbe non essere causale; ~~in tal caso~~ si dovrebbe traslare il tutto a dx e spostare della stessa quantità l'istante di campionamento (in particolare si deve spostare tutto di D).

Il segnale ricevuto sarà $s_i(t)$ sommato al rumore $n(t)$ AWGN:

$$\boxed{r(t) = a\,p(t) + n(t)} \qquad (11.1)$$

all'uscita del filtro adattato

$$x(t) = r(t) \otimes h(t) =$$

$$= r(t) \otimes p(-t) =$$

$$= a\,p(t) \otimes p(-t) + n(t) \otimes p(-t) \qquad (11.2)$$

poniamo

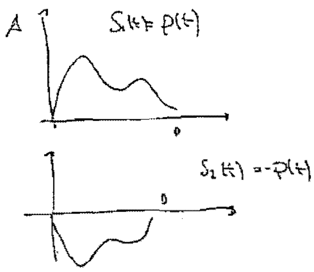
$$g(t) = p(t) \otimes p(-t) \qquad (11.3.1)$$

$$n_1(t) = n(t) \otimes p(-t) \qquad (11.3.2)$$

quindi

$$x(t) = a\,g(t) + n_1(t)$$

essendo $n(t)$ un processo anche $n_1(t)$, e quindi $x(t)$, è un processo; il campionamento in $t=0$, fissa il tempo ed estrae dal processo una variabile casuale $x(0)$ come segue



$a \in \{1, -1\}$

$P(a=1) = p$

$P(a=-1) = 1-p$

$s(t) = a\,p(t)$

$s(t) = a\,p(t)$

se $g(t) = p(t) \otimes p(-t)$

$n(t) = w(t) \otimes p(-t)$

$r(t) = a\,p(t) + w(t) \longrightarrow \boxed{p(t_0 - t)} \longrightarrow x(t) \xrightarrow{t_0} x(t_0) = a\,g(0) + n(0)$

$x(t) = r(t) \otimes p(t_0 - t) =$

$= [a\,p(t) + w(t)] \otimes p(t_0 - t) = a\,\underbrace{p(t) \otimes p(t_0 - t)}_{g(t-t_0)} + \underbrace{w(t) \otimes p(t_0 - t)}_{n(t-t_0)}$

$= a\,g(t - t_0) + n(t - t_0)$

a è variabile casuale

$n(0)$ è variabile ~~casua~~ casuale gaussiana $\begin{cases} 1)\ \text{valor medio} \\ 2)\ \text{varianza} \end{cases}$

$$\underset{\frac{N_0}{2}}{w(t)} \longrightarrow \boxed{p(-t)} \longrightarrow \underset{\frac{N_0}{2}|P(f)|^2}{n(t)} \qquad p(-t) = p^*(t)$$

2) Per la varianza ho bisogno di σ^2 che è $\quad \sigma^2 = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df$

$= \text{per Parseval} = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t)\,dt = \frac{N_0}{2}\underbrace{E_p}_{\text{energia}}$

Se filtro un processo con valor medio nullo e densità spettrale di potenza $= \frac{N_0}{2}$ in uscita il valor medio è ancora nullo e la d.s.p è data da quella di ingresso per la t.d.F. del filtro

Vediamo $g(0)$

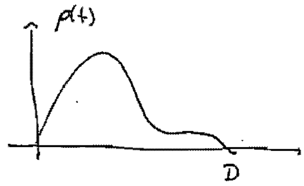
$g(t) = p(t) \otimes p(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau)\,p(\tau - t)\,d\tau$

$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau)\,p(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(\tau)\,d\tau = E_p$

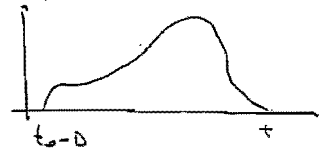
$$H(f) = \frac{K\, p^*(f)\, e^{-j2\pi f t_0}}{\frac{N_0}{2} S_n(f)} = K\, p^*(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$$

$$h(t) = K\, p(t_0 - t)$$

$t_0 > D$ garantisce un filtro causale



$h(t) = K\,p(t_0 - t)$



Il ricevitore deve campionare all'istante di campionamento: prima e dopo quest'istante non è più possibile massimizzare il rapporto segnale rumore. Per sincronizzare questo istante introduco una funzione ausiliaria detta ~~sin~~ SINCRONIZZAZIONE DI CLOCK

$$P\{X > x_1\} = P\left\{ \frac{X - m_x}{\sigma_x} > \frac{x_1 - m_x}{\sigma_x} \right\} = Q\left(\frac{x_1 - m_x}{\sigma_x}\right)$$

$$= \int_{x_1}^{+\infty} p_x(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x_1 - m_x}{\sigma_x}}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = Q\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right)$$

$$\boxed{x(0) = a\,g(0) + n_1(0)}$$

Calcoliamo ora le statistiche di $g(0)$ e $n_1(0)$. $\left(\mathcal{F}[p(at)] = \frac{1}{|a|} P\left(\frac{f}{a}\right)\right)$
Sappiamo che

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[G(f)\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[P(f)P(-f)\right] =$$

$G(f) = P(f)P(-f) =$
$= P(f)P^*(f) = |P(f)|^2$
per la simmetria Hermittiana.

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t)\, dt$
per PARSEVAL

allora

$$(11.4) \quad \boxed{g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} P(f) P^*(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df = E_p}$$

dalla precedente si deduce che $g(0)$ è l'energia dell'impulso $p(t)$.

Per quanto riguarda $n_1(t)$ possiamo dire che, essendo ottenuto da $n(t)$*, AWGN, è anch'esso gaussiano a media nulla

* attraverso un filtro LTI (Lineare e tempo invariante).

$$\eta_n = 0 \implies \boxed{\eta_{n_1} = 0}$$

inoltre la densità spettrale di potenza risulta:

$$\left(\text{se } S_n(f) = \frac{N_0}{2}\right) \quad S_{n_1}(f) = S_n(f)\,|P(f)|^2 = \frac{N_0}{2}\,|P(f)|^2$$

Per quanto detto anche la v.c. $n_1(0)$ è gaussiana

$$n_1(0) \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

a valor medio nullo e covarianza

$\sigma^2 = E\{[n_1(0) - \eta_1]^2\}$

$$\sigma_{n_1}^2 = E\{n_1^2(0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2}\,|P(f)|^2 df = \boxed{\frac{N_0}{2} E_p}$$

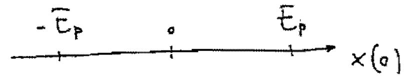
In conclusione si può dire che essendo

$$\boxed{x(0) = a\,E_p + n_1(0)}$$

con a che assume il valore 1 o -1, la componente di rumore $n_1(0)$ fa sì che $x(0)$* cada fra $-E_p$ e E_p.

* In realtà $x(0)$ cade al di fuori dei valori E_p e $-E_p$ ma il problema si ha quando $x(0)$ è compreso fra i due valori.

Il DECISORE dovrà scegliere sulla base di $x(0)$ il valore di a emettendo il risultato $\hat{a}$.



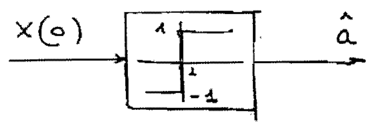
E' ragionevole pensare che la soglia in base alla quale decidere debba dipendere dalla probabilità di trasmissione di un carattere; per chiarire questo aspetto supponiamo di sapere con certezza che il carattere t_x è 1: allora $P = 1$ e $P - 1 = 0$ allora possiamo spostare la soglia a $-\infty$. In generale se 120

$$P > 1 - P$$

è ragionevole spostare la soglia verso il risultato meno probabile. Ponendo la soglia pari a λ il decisore sarà definito come segue

$$\boxed{\hat{a} = \begin{cases} 1 & \text{se } x(0) \geq \lambda \\ -1 & \text{se } x(0) < \lambda \end{cases}}$$

In questo caso si parla di DECISORE A SOGLIA ed è schematizzabile con il blocco non lineare senza memoria seguente:



Osserviamo che l'uguaglianza* può essere arbitrariamente ~~te messa in entrambe~~ le situazioni; infatti $x(0)$ è una v.c. continua, per la quale $P\{x(0) = \lambda\} = 0$

A questo punto è necessario quantificare la probabilità di errare sul simbolo, ovvero:

$$P\{\hat{a} \neq a\} = P_s = \text{PROBABILITA' DI ERRORE SUL SIMBOLO}$$

Osserviamo che

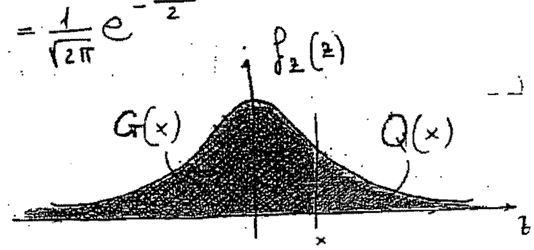
$$P\{\hat{a} \neq a\} \overset{\text{teorema della probabilità totale}}{=} P(\hat{a} \neq a \mid a = 1)P(a = 1) + P(\hat{a} \neq a \mid a = -1)P(a = -1)$$

RICHIAMI SULLE VARIABILI CASUALI GAUSSIANE

Una v.c. GAUSSIANA STANDARD è definita come segue

$$z \in \mathcal{N}(0,1) \qquad f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Ricordiamo che l'area sottesa dalla gaussiana è unitaria



Fissato un valore x si definisce la funzione CODA $Q(x)$

$\mathcal{Z} = \frac{x - m_x}{\sigma_x}$

$$\boxed{Q(x) = \int_x^{+\infty} f_z(z)\,dz = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz}$$

Non esiste una primitiva in forma chiusa, quindi i valori di $Q(x)$ sono tabulati.
Analogamente per il valore di x si definisce

$$\boxed{G(x) = 1 - Q(x) = \int^x f_z(z)\,dz}$$

Derivando

$$\frac{dQ}{dx}(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \frac{dG}{dx}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Tornando al problema

$$P(\hat{a} \neq a \mid a = 1) = P(\hat{a} = -1 \mid a = 1) = P(x(0) < \lambda \mid a = 1)$$

se è stato trasmesso un uno, cioè $a = 1$, si ha

$$x(0) = a E_p + n_1(0) = E_p + n_1(0)$$

allora

$$P(x(0) < \lambda \mid a = 1) = P(aE_p + n_1(0) < \lambda \mid a = 1) =$$

$$= P(E_p + n_1(0) < \lambda) =$$

$$= P(n_1(0) < \lambda - E_p)$$

$\underbrace{aE_p + n_1(0)}/\underbrace{a = 1}$ se metto $a=1$ i due eventi diventano indipendenti

Osserviamo che $n_1(0)$ è gaussiana non standard, tuttavia dividendo per σ si ottiene una gaussiana standard.
Allora anziché considerare $n_1(0)$, poniamo

$$\underbrace{z = \frac{n_1(0)}{\sigma}}$$

ed essa è standard.

Dim.
$$\mathbb{E}\{z\} = \frac{\mathbb{E}\{n_1(0)\}}{\sigma} = 0$$

inoltre

122

$$\mathbb{E}\{z^2\} = \mathbb{E}\left\{\frac{n_1^2(0)}{\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\sigma^2}\,\mathbb{E}\{n_1^2(0)\} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

Quindi

$$P(\hat{a} \neq a \mid a = 1) = P(n_1(0) < \lambda - E_p) =$$

$$= P\left(\frac{n_1(0)}{\sigma} < \frac{\lambda - E_p}{\sigma}\right) =$$

$$= P\left(z < \frac{\lambda - E_p}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{E_p - \lambda}{\sigma}\right) =$$

$$= Q\left(\frac{E_p - \lambda}{\sqrt{\frac{N_0}{2}E_p}}\right) \quad \left(\to P\left(-z > \frac{E_p - \lambda}{\sigma}\right)\right)$$

In conclusione la probabilità di errare sul simbolo risulta

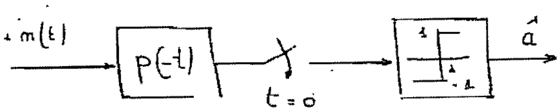
$$P_s = P(\hat{a} \neq a \mid a = 1)\overbrace{P(a = 1)}^{p} + P(\hat{a} \neq a \mid a = -1)\overbrace{P(a = -1)}^{1-p} =$$

$$= Q\left(\frac{E_p - \lambda}{\sqrt{\frac{N_0}{2}E_p}}\right)p + Q\left(\frac{E_p + \lambda}{\sqrt{\frac{N_0}{2}E_p}}\right)(1 - p) = P_s(\lambda) \qquad (11.5)$$

DETERMINAZIONE DELLA SOGLIA OTTIMA (SISTEMA BINARIO)

Nel caso di una trasmissione binaria, abbiamo stabilito che la probabilità di errare sul simbolo è data dalla relazione (11.5), riportata di seguito, ottenuta con il sistema di figura

$$P_s(\lambda) = Q\left(\frac{E_p - \lambda}{\sqrt{\frac{N_0}{2}E_p}}\right)p + Q\left(\frac{E_p + \lambda}{\sqrt{\frac{N_0}{2}E_p}}\right)(1 - p)$$



Per determinare il valore di λ che minimizza la probabilità di errare, deriviamo rispetto a λ la (11.5)

$$(11.6)\quad \frac{dP_s(\lambda)}{d\lambda} = p\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(E_p - \lambda)^2}{2\sigma^2}}\right)\left(-\frac{1}{\sigma}\right) + (1 - p)\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(E_p + \lambda)^2}{2\sigma^2}}\right)\frac{1}{\sigma} =$$

ricordando che

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{con} \quad \sigma^2 = \frac{N_0}{2}E_p$$

Uguagliando a zero la (11.6)

$$P\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\bar{E}_p-\lambda)^2}{2\sigma^2}}\right)\left(-\frac{1}{\sigma}\right) + (1-P)\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\bar{E}_p+\lambda)^2}{2\sigma^2}}\right)\frac{1}{\sigma} = 0 \quad \text{+ dividendo}$$

$$P\, e^{-\frac{(\bar{E}_p-\lambda)^2}{2\sigma^2}} - (1-P)\, e^{-\frac{(\bar{E}_p+\lambda)^2}{2\sigma^2}} = 0$$

$$e^{-\frac{(\bar{E}_p-\lambda)^2}{2\sigma}} = \frac{1-P}{P}\, e^{-\frac{(\bar{E}_p+\lambda)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{1-P}{P} = e^{-\frac{(\bar{E}_p-\lambda)^2}{2\sigma^2}}\, e^{\frac{(\bar{E}_p+\lambda)^2}{2\sigma^2}}$$

allora

$$\frac{(\bar{E}_p+\lambda)^2-(\bar{E}_p-\lambda)^2}{2\sigma^2} = \ln\left(\frac{1-P}{P}\right)$$

$$\cancel{E_p^2} + \cancel{\lambda^2} + 2\lambda E_p - \cancel{E_p^2} - \cancel{\lambda^2} + 2\lambda E_p = 2\sigma^2 \ln\left(\frac{1-P}{P}\right)$$

$$\Longrightarrow\quad 4\lambda E_p = 2\sigma^2 \ln\left(\frac{1-P}{P}\right)$$

quindi

$$\underline{\lambda_{OTTIMO}} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E_p}\ln\left(\frac{1-P}{P}\right) = \frac{1}{2}\frac{N_0}{2}E_p\frac{1}{E_p}\ln\left(\frac{1-P}{P}\right) = \underline{\frac{N_0}{4}\ln\left(\frac{1-P}{P}\right)} \qquad (11.7).$$

facendo la derivata seconda, si può dimostrare che esso è un pt. di minimo.

Osserviamo che se i due eventi sono EQUIPROBABILI

$$\underline{P = 0{,}5 \qquad \lambda_{OTTIMO} = 0}$$

Se invece l'evento $\{a=0\}$ è impossibile

$$\underline{P = 1 \qquad \lambda_{OTTIMO} = -\infty}$$

Se l'evento impossibile è $\{a=1\}$ avremo

$$\underline{P = 0 \qquad \lambda_{OTTIMO} = +\infty}$$

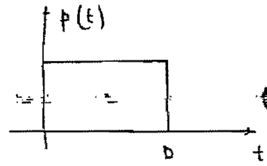
Calcoliamo la probabilità di errore P_s nel caso in cui venga scelta la soglia ottima:

$$P_s(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_{ottima}} = P\,Q\left(\frac{E_p-\lambda_{ottimo}}{\sigma}\right)+(1-P)\,Q\left(\frac{E_p+\lambda_{ottima}}{\sigma}\right)$$

$$P_s(0)\Big|_{\substack{\lambda=\lambda_{ottima}\\ P=0,5\\ \lambda_0=0}} = Q\left(\frac{E_p}{\sqrt{\frac{N_0}{2}E_p}}\right)=Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{N_0}}\right)$$

TRASMISSIONI MULTIPLE (SISTEMI BINARI)

Analizziamo il caso in cui venga trasmessa una sequenza di segnali PAM. Scelto l'impulso $p(t)$, con durata D e definito l'intervallo di segnalazione T, supponiamo di voler trasmettere la sequenza 1001 associando all'1 $a=1$ e allo 0 $a=-1$.



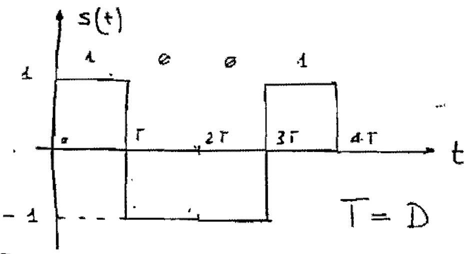
Vediamo le due situazioni significative.

Il segnale PAM $s(t)$ può essere espresso matematicamente con il modello $\boxed{s(t)=\sum_k a_k\,p(t-kT)}$

Nella quale a_k è un coeff. che dipende dall'istante.

A. $D\leq T$. La durata dell'impulso è inferiore all'intervallo di segnalazione (in particolare analizziamo il caso limite $D=T$). La sequenza trasmessa $s(t)$ sarà

$$s(t)=\sum_k a_k\,p(t-kT)$$



Sul canale si sovrappone il rumore $n(t)$ AWGN. Vediamo cosa succede all'uscita del filtro adattato

$$x(t)=[s(t)+n(t)]\otimes p(-t)=$$

$$= s(t)\otimes p(-t)+n(t)\otimes p(-t)=$$

$$=\sum_k a_k\,p(t-kT)\otimes p(-t)+n(t)\otimes p(-t)$$

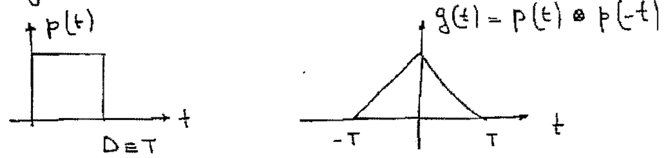
ponendo $\quad g(t)=p(t)\otimes p(-t)$

$$g(t-kT) = p(t-kT) \otimes p(-t)$$

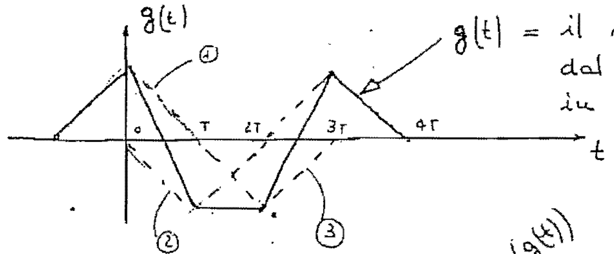
quindi

$$x(t) = \sum_k a_k\, g(t-kT) + n_1(t) \qquad (11.8)$$

Osserviamo che per p(t) rettangolare, g(t) è triangolare come segue



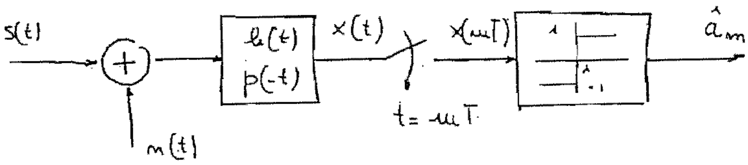
Allora in riferimento alla sequenza 1001 trasmessa il segnale s(t) risulta, trascurando il rumore,



g(t) = il segnale in uscita dal filtro frontale in assenza di rumore

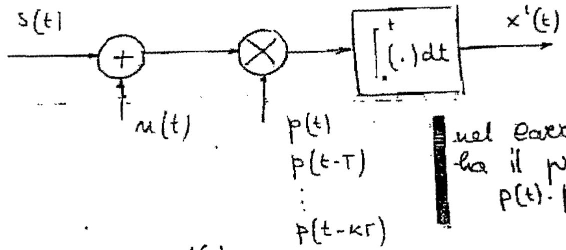
Dall'andamento temporale di s(t) (g(t)) si deduce che, progettando correttamente il filtro frontale secondo la relazione (10.9), possiamo massimizzare il rapporto SNR in ingresso al ricevitore; inoltre campionando opportunamente negli istanti $t = mT$, con m intero, si può estrapolare solo il simbolo di interesse: la durata dell'impulso è al più pari a T, quindi campionando negli istanti suddetti il simbolo precedente① si è già esaurito, mentre quello successivo③ deve ancora iniziare. Nel rispetto dei vincoli appena esposti, non si verifica INTERFERENZA INTERSIMBOLICA (ISI); in altri termini non si ha sovrapposizione fra i simboli negli istanti di campionamento ea Allineamento.

(ideale impiegando un ricevitore a FILTRO ADATTATO te e più possibile ricevere il segnale correttamente inserire i simboli trasmessi. Sarà necessario ~~inserire un~~ "decisore a soglia" progettato secondo i criteri della "soglia ottima". Secondo quanto detto un possibile schema di ricezione può essere il seguente 126

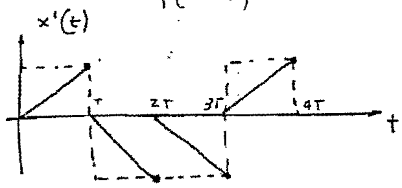


SCHEMA DI RICEZIONE PAM REALIZZATO CON FILTRO ADATTATO

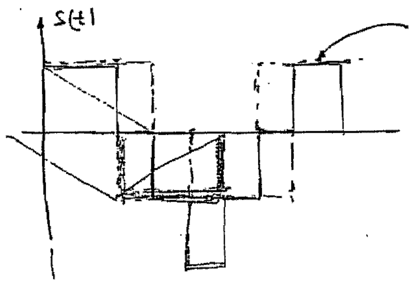
Valutiamo la possibilità di impiegare come ricevitore un CORRELATORE al posto del filtro adattato (vedi figura). L'andamento temporale del segnale x'(t) può facilmente essere ricavato dall'operazione di integrazione (sempre in riferimento alla sequenza 1001). Anche in questo caso campionando negli istanti opportuni t=nT il decisore a soglia è in grado di restituire il simbolo trasmesso.



nel correlatore si ha il prodotto p(t)·p(t) = p(t)

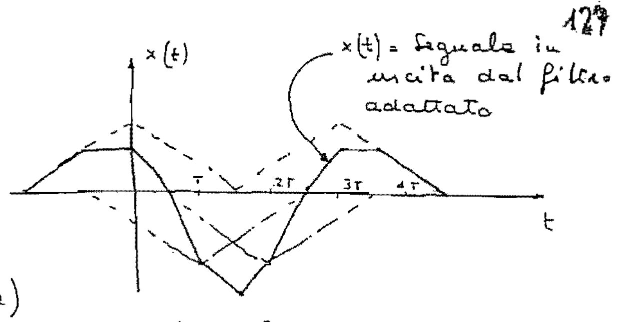


B. D > T. La durata dell'impulso è maggiore dell'intervallo di segnalazione (in particolare analizziamo il caso in cui $D = T + \frac{T}{2}$). In riferimento all'impulso p(t) e alla sequenza 1001 visti in precedenza, possiamo osservare che in uscita dal trasmettitore si ha un segnale s(t) fortemente "distorto". La sovrapposizione dei simboli si verifica già in uscita dal Tx. Anche in questo caso il filtro adattato trasforma gli impulsi



s(t) = segnale immesso sul canale dal trasmett.

rettangolari in impulsi triangolari simmetrici, quindi è possibile tracciare l'andamento temporale del segnale x(t) in uscita dal filtro (supponendo nullo il rumore)



È possibile che si verifichi ISI. Il filtro adattato è ancora utilizzabile, ma il correlatore no.
Per quanto riguarda il decisore, può essere impiegato un DECISORE A SOGLIA se non si verifica ISI. Se al contrario c'è interferenza è necessario impiegare algoritmi di decisione più complessi come ad esempio l'ALGORITMO DI VITERBI.
Il caso D>T può essere modellato matematicamente nel modo seguente.

$$x(t) = \sum_k a_k\, g(t-kT) + n_1(t)$$

campionando in $t = mT$, si ottiene

$$x(mT) = \sum_k a_k\, g(mT-kT) + n_1(mT) =$$

$$\underset{k=m}{=} \underbrace{a_m\, g(0)}_{\text{A}} + \underbrace{a_{m-1}\, g(T) + a_{m+1}\, g(-T) + a_{m-2}\, g(2T) + a_{m+2}\, g(-2T) + \dots}_{\text{B}} + \underbrace{n_1(t)}_{\text{C}} =$$

Il termine A contiene il simbolo utile, cioè quello che vorremmo estrapolare nell'istante di campionamento; il termine B contiene tutte le componenti relative ai simboli che devono esaurirsi o che sono già cominciati. Il termine C è il rumore AWGN del canale. Osserviamo che

$$(11.9) \qquad x(mT) = \underbrace{a_m\, g(0)}_{\text{TERMINE UTILE}} + \underbrace{\sum_{k}^{k\neq m} a_k\, g[(m-k)T]}_{\text{INTERFERENZA INTERSIMBOLICA}} + \underbrace{n_1(mT)}_{\text{RUMORE}}$$

Per sopprimere l'interferenza intersimbolica è necessario modellare l'impulso $p(t)$ in modo che

$$g(t) \triangleq p(t) \otimes p(-t)$$

sia tale che

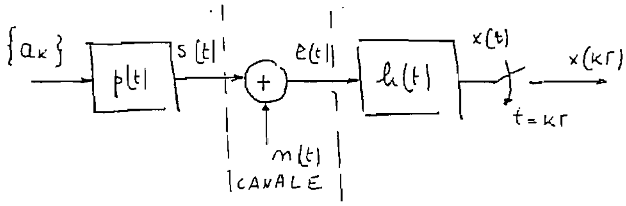
$$g(l) = \begin{cases} g(0) & \text{se } l = 0 \\ 0 & \text{se } l \neq 0 \end{cases} \quad (11.10)$$

Una funzione che rispetta la (11.10) è la Sinc, che purtroppo è tecnologicamente difficile da realizzare.

Riassumendo le due situazioni si presentano come segue:

	ISI	FILTRO	DECISORE
D ≤ T	NO	Filtro Adattato o Correlatore	A SOGLIA
D > T	SI / NO	Filtro Adattato	VITERBI / A SOGLIA

Osservazione: Il caso D > T benché svantaggioso è di fatto l'unico realmente possibile. Si ricordi che un segnale a durata limitata ha banda infinita. Questo può non essere accettabile nel caso di FDM. Anche se potessimo ignorare l'occupazione frequenziale dell'impulso, il canale è di fatto un filtro passa banda con banda Bc; di conseguenza taglia la banda dell'impulso trasformandolo in uno a durata infinita.



Come noto

$$s(t) = \sum_k a_k \, p(t-kT) + n(t)$$

mentre

$$x(t) = \sum_i a_i \, g(t-iT) + n_1(t)$$

sappiamo che per definizione

$$g(t) \triangleq s(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\nu)\, h(t-\nu)\, d\nu$$

$$n_1(t) \triangleq n(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(\nu)\, h(t-\nu)\, d\nu$$

campionando in $t = kT$

$$x(kT) = \sum_i a_i \, g(kT-iT) + n_1(kT) =$$

$$= \underbrace{a_k \, g(0)}_{(A)\ \text{per } k=i} + \underbrace{\sum_{i \neq k} a_i \, g\left[(k-i)T\right]}_{(B)} + \underbrace{n_1(kT)}_{(C)}$$

Come già accennato il termine (A) rappresenta il campione utile, (B) rappresenta il termine di ISI e (C) il rumore. Per annullare l'ISI ribadiamo la condizione (11.10)

$$\boxed{g(kT) = \begin{cases} 1 & \text{se } l = 0 \\ 0 & \text{se } l \neq 0 \end{cases}}$$

Condizione di Nyquist

inoltre, scrivendo la (11.10) nel modo seguente

$$\sum_k g(kT)\, \delta(t-kT) \overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{T} \sum_k G\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad ?$$

imponendo la condizione che annulla l'ISI

$g(0)\delta(t) = \delta(t)$ perché $g(0) = 1$

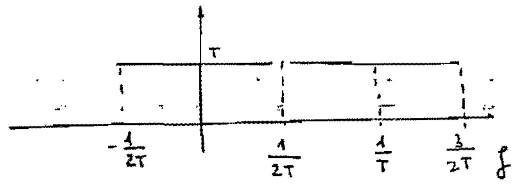
$$\frac{1}{T} G\left(f - \frac{k}{T}\right) = 1$$

$$\boxed{G\left(f - \frac{k}{T}\right) = T} \qquad (12.1)$$

La relazione (12.1) afferma che per non avere interferenza intersimbolica è necessario considerare una $G(f)$ rettangolare che va da $-\frac{1}{2T}$ a $\frac{1}{2T}$

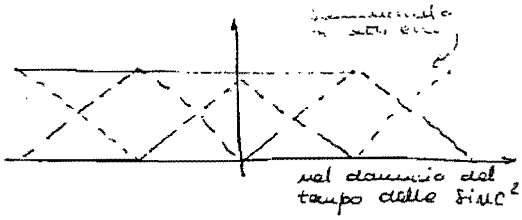
$$\boxed{G(f) = T\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{1/T}\right)}$$

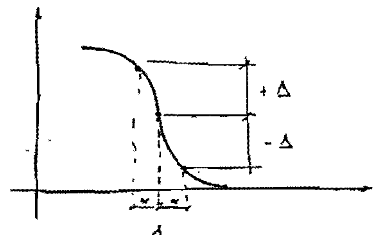
che periodicizzata da origine ad una costante e pari a T.



Il segnale che ha andamento in frequenza rettangolare è la funzione Sinc. In effetti la Sinc è tale perciò si annulla in tutti i multipli di T non nulli e quindi rispetta la condizione (11.10). Osserviamo che l'aggiunta di uno sfasamento modifica le cose.

La condizione di Nyquist è rispettata anche dalle funzioni il cui andamento in frequenza è quello di figura. In generale la (12.1) è verificata con tutte le funzioni che hanno una particolare simmetria detta SIMMETRIA VESTIGIALE: queste funzioni hanno simmetria dispari rispetto al punto $1/2T$ e $-1/2T$ in modo che sommando le repliche diano origine ad una costante. In sostanza una funzione ha "simmetria vestigiale" rispetto al punto $\frac{1}{2T}$ se uno spostamento verso dx di α produce una variazione $-\Delta$ e uno stesso spostamento α verso sx produce una variazione di $+\Delta$

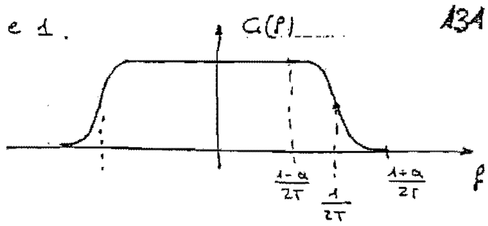




Una classe di funzione che rispettano queste condizioni è quella del COSENO RIALZATO: la simmetria è quello di un coseno traslato verso l'alto. È caratterizzato da un parametro α detto ROLL OFF che definisce la banda in eccesso (o banda vestigiale). $(0 \leq \alpha < 1)$

Il "roll off" α è compreso tra 0 e 1.

$$0 \le \alpha \le 1$$



Nel dominio del tempo una funzione a simmetria vestigiale nel dominio del tempo è simile ad una sinc per la quale le oscillazioni al di fuori dell'impulso in zero sono maggiormente smorzate di una sinc normale. All'aumentare di α, cioè del roll off, lo smorzamento delle code aumenta; allora per minimizzare l'ISI si pone α elevato.

Come noto dalla definizione

$$g(t) = p(t) \otimes h(t)$$

$$G(f) = P(f)\,H(f)$$

1) riduzione banda (α grande) che pagheremo con una maggior facilità a subire errori;
2) α piccolo, circuito di sincronismo di clock buono

quindi per avere la $G(f)$ voluta abbiamo due gradi di libertà $p(t)$ e $h(t)$; per massimizzare il rapporto segn. rumore $h(t)$ va progettato "adattato" a $p(t)$, ovvero

$$h(t) = p(-t)$$

$$\boxed{H(f) = P^*(f)}$$

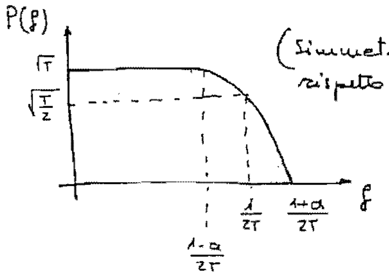
per questo motivo

$$\boxed{G(f) = P(f)P^*(f) = |P(f)|^2 = G_N(f)} \quad (12.2.1)$$

quindi

$$(12.2) \quad \boxed{P(f) = \sqrt{G_N(f)}}$$ = radice di un coseno rialzato.

L'andamento in frequenza della radice del coseno rialzato è riportato nella figura a lato.



(Simmetrico rispetto all'asse y)

Sappiamo che il canale di trasmissione è di fatto un filtro $C(f)$: allora se $p(t)$, con $P(f)$, è l'impulso che viene trasmesso, il ricevitore rileva in ingresso l'impulso con $P(f)\,C(f)$. Allora la condizione di adattamento del filtro si traduce nella seguente 132

$$\boxed{H(f) = P^*(f)\,C^*(f)} \qquad (12.3)$$

per avere un impulso in grado di non provocare ISI si deve imporre la condizione

$$H(f)\,P(f)\,C(f) = G_N(f)$$
$$P^*(f)\,P(f)\,C^*(f)\,C(f) = G_N(f)$$
$$|P(f)|^2\,|C(f)|^2 = G_N(f) \qquad (12.4)$$

dalla quale

$$\boxed{P(f) = \frac{\sqrt{G_N(f)}}{|C(f)|}} \qquad (12.5)$$

Tutto questo ammesso che il canale sia tempo invariante e data $C(f)$

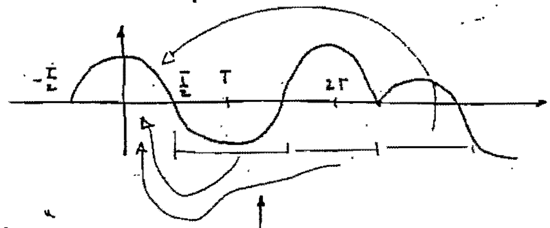
considerando l'effetto che il filtro adattato ha sul rumore additivo

Area sottesa dal coseno rialzato è unitaria.

$$(12.6) \qquad E\{n_1^2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f)\,|H(f)|^2\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2}\,G_N(f)\,df = \frac{N_0}{2}$$

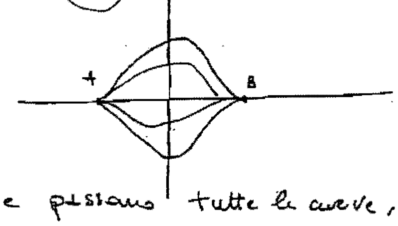
DIAGRAMMI AD OCCHIO

Si consideri il segnale, distorto dal canale, in assenza di rumore; si sovrappongano i tratti di curva che rappresentano l'andamento temporale nell'intervallo $-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}$. Se rispettata la condizione di Nyquist le curve si intersecano in due punti.



Maggiore ISI ⟹ "Occhio chiuso"

Minore α ⟹ Minore banda ma sistema più instabile.



L'istante di campionamento si trova dove passano tutte le curve, in questo punto l'ISI è assente

⟹ pag. 140

Pag 137

2) Verifico la presenza o meno di ISI
3) Più è aperto l'occhio in larghezza, più siamo immuni all'errore.

$a_k \in \{\pm 1\}$

$P(a_k = 1) = p$

$P\{a_k = -1\} = 1 - p$

$E\{a_k\} = 1 \cdot p + (-1)(1-p) = 2p - 1$

$\Theta(t) = \underbrace{2\pi f_0 t + \theta_0}_{\theta(t)} + \underbrace{\phi_\Delta x(t)}_{\Phi(t)}$ fase del segn non modulato (*) $\boxed{\text{DOPO } 8.4}$

$\theta_{PM}(t) = 2\pi f_0 t + \theta_0 + \phi_\Delta x(t)$ fase segn modulato, ϕ varia in proporzione a $\phi_\Delta x(t)$

$$\theta_{PM}(t) - \theta(t) = \phi_\Delta x(t)$$

(*) $\boxed{\text{DOPO } 8.6}$

Derivando $X_{FM}(t)$ ottengo

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} = f_0 + f_\Delta x(t)$$

segnale positivo → aumento frequenza
" negativo → diminuisce freq.

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_\Delta x(t) & PM \\ 2\pi f_\Delta \int_{-\infty}^{t} x(\alpha) d\alpha & FM \end{cases}$$

la frequenza spettrale è una variabile indipendente

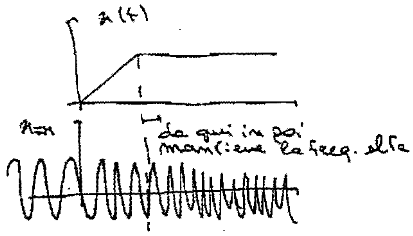
(*) $\boxed{\text{Pag } 92}$ $f_\Delta = 75 kHz$
$B = 15 kHz$

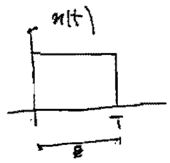
$$B_{FM} \simeq \begin{cases} 210 \text{ kHz} & 2(f_\Delta + 2B) \\ 180 \text{ kHz} & 2(f_\Delta + B) \end{cases} \Big\} \ 200 \text{ kHz}$$

accostando due segnali a 200 kHz non c'è interferenza

$$B_{FM} = 2(f_\Delta + (2)B)$$

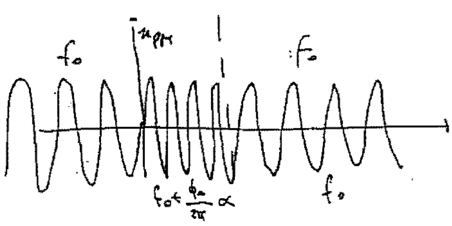
$\boxed{\text{Es}}$





Modulando in PM significa modulare in FM la derivata del segnale

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} = f_0 + \frac{\phi_\Delta}{2\pi} x(t)$$



Consideriamo un generico segnale PAM espresso dalla relazione

$$\boxed{s(t) = \sum_k a_k \, p(t-kT)} \qquad (13.1)$$

questo è un processo non stazionario; allora l'autocorrelazione dipende oltre che da τ, anche da t.
Tuttavia

$$\boxed{R_s(t,\tau) = \mathbb{E}\{s(t+\tau)\, s(t)\}} \qquad (13.2)$$

dipende dal tempo in modo periodico, cioè

$$\boxed{R_s(t+T,\tau) = R_s(t,\tau)}$$

inoltre il valor medio

$$\boxed{\eta_s(t) = \mathbb{E}\{s(t)\} = \eta_s(t+T)} \qquad (13.3)$$

questo processo, per il quale valgono le relazioni (13.2) e (13.3), si dice CICLOSTAZIONARIO.

$$s(t) \rightarrow S_{T_0}(t) \longrightarrow S_{T_0}(f)$$

$s(t)$ per $-\frac{T_0}{2} \le t \le \frac{T_0}{2}$

$$W_s(f) = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{\mathbb{E}\{|S_{T_0}(f)|^2\}}{T_0}$$

La densità spettrale di potenza del processo $s(t)$ $W_s(f)$ risulta

$$\boxed{W_s(f) = \frac{W_a(f)}{T} |P(f)|^2} \qquad (13.4)$$

nella quale $W_a(f)$ è la densità spettrale di potenza del processo tempo discreto a_k; in particolare si calcola

$$\boxed{\begin{aligned} R_a(m) &= \mathbb{E}\{a_{k+m}\, a_k\} && (13.5.1) \\ W_a(f) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_a(m)\, e^{-j2\pi m f T} && (13.5.2) \end{aligned}}$$

Nella relazione (13.4), il termine $|P(f)|^2$ non è altro che lo spettro dell'impulso $p(t)$ dalla (12.2.1) in particolare

$$|P(f)|^2 = G(f)$$

dove $G(f)$ è il coseno rialzato.

Esempio

Consideriamo come impulso $p(t)$ la radice di un coseno rialzato con rolloff α. Inoltre consideriamo un alfabeto

$$A = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \pm (M-1)\}$$

con eventi indipendenti ed equiprobabili con $p_i = \frac{1}{M}$.

Calcoliamo l'autocorrelazione;

$$R_a(m) = \mathbb{E}\{a_{k+m}\, a_k\}$$

distinguiamo due casi:

1. Se $m = 0$

$$R_a(m) = R_a(0) = \mathbb{E}\{a_k^2\}$$

2. Se $m \neq 0$

$$R_a(m) = \mathbb{E}\{a_{k+m}\, a_k\} \underset{\uparrow}{=} \mathbb{E}\{a_{k+m}\}\, \mathbb{E}\{a_k\}$$

perchè indipendenti

Osserviamo che

$$\mathbb{E}\{a_k\} = 1 \cdot \frac{1}{M} + (-1)\frac{1}{M} + 3\,\frac{1}{M} + (-3)\frac{1}{M} + \dots = 0$$

e questo vale anche per $\mathbb{E}\{a_{k+m}\}$. Il valore quadratico medio

$$\mathbb{E}\{a_k^2\} = (1)^2\frac{1}{M} + (-1)^2\frac{1}{M} + (3)^2\frac{1}{M} + (-3)^2\frac{1}{M} + \dots =$$

$$= \frac{M^2-1}{3} \longleftarrow \text{formula generale valida per ogni } M$$

Allora:

Se $m = 0$ $\quad R_a(m) = \mathbb{E}\{a_{k+m}\, a_k\} = \mathbb{E}\{a_k^2\} = \frac{M^2-1}{3}$

Se $m \neq 0$ $\quad R_a(m) = \mathbb{E}\{a_{k+m}\, a_k\} = \mathbb{E}\{a_{k+m}\}\,\mathbb{E}\{a_k\} = 0$

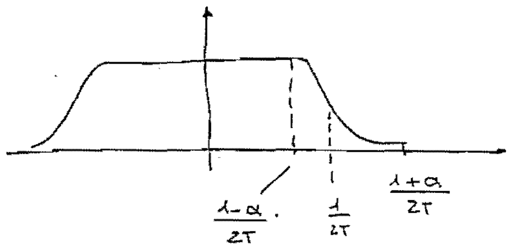
Calcoliamo ora la densità spettrale di potenza del processo a_k detta $W_a(f)$.

Sulla base della relazione (13.5.2)

$$W_a(f) = \sum_m R_a(m) e^{-j2\pi f m T} = R_a(0) = \frac{M^2-1}{3} \qquad R_a(\ ) = \frac{M^2-1}{3}\delta_m$$

La dens. spett. di potenza del segnale PAM risulta

$$W_s(f) = \frac{W_a(f)}{T}\,|P(f)|^2 = \frac{M^2-1}{3T}\,G(f)$$



Osservazione: Se avessimo scelto $p(t)$

$$p(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

come noto la TCF

$$P(f) = T\,sinc(fT)$$

avremmo avuto

$$W_s(f) = \frac{M^2-1}{3T}\,|P(f)|^2 =$$

$$= \frac{M^2-1}{3T}\,|T\,sinc(fT)|^2$$

Esempio

Si consideri $p(t)$ come nell'esempio precedente, con un alfabeto $a_k \in \{0,1\}$

Per trovare lo spettro calcolo l'autocorrelazione

L'autocorrelazione

$$R_a(m) = \mathbb{E}\{a_{k+m}a_k\}$$

come prima

Se $m=0$ $R_a(m) = R_a(0) = \mathbb{E}\{a_k^2\} = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}\cdot(1)^2 + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}$$

se $m \neq 0$ $\quad R_a(m) = \mathbb{E}\{a_{k+m}\, a_k\} = \mathbb{E}\{a_{k+m}\}\,\mathbb{E}\{a_k\} = \frac{1}{4}$ 136

allora

$\mathbb{E}\{a_k^2\} = (0)^2\frac{1}{2} + (1)^2\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{E}\{a_k\} = (0)\frac{1}{2} + (1)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$R_a(m) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\delta_m$$

Calcoliamo la densità spettrale di potenza $W_a(f)$ secondo la ( )

$$W_a(f) = \sum_m R_a(m)\, e^{-j2\pi f m T} =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f m T} + \frac{1}{4}$$

Ricordando che

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi m f T} = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

avremo

$$W_a(f) = \frac{1}{4}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{j\pi 2 m f T} + \frac{1}{4} =$$

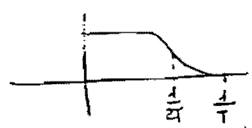
$$= \frac{1}{4T}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) + \frac{1}{4}$$

quindi dalla (13.4)

$$W_s(f) = \frac{W_a(f)}{T}\,|P(f)|^2 =$$

$$= \frac{|P(f)|^2}{4T} + \frac{1}{4T^2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left|P\left(\frac{m}{T}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

Essendo $p(t)$ un coseno rialzato, $P(f)$ è nulla in $\frac{m}{T}$ se $m \neq 0$, allora rimane



$$W_s(f) = \frac{|P(f)|^2}{4T} + \frac{1}{4T^2}|P(0)|^2\,\delta(f)$$

Il coseno rialzato si annulla al più in $\frac{1}{T}$ allora per ogni m/T con $m \neq 0$ $P(\frac{m}{T}) = 0$

Rispetto all'esempio precedente, $W_s(f)$ è identico, con l'aggiunta di una δ nell'origine.

— * —

Esempio

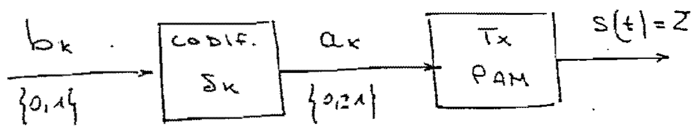
Supponiamo di avere dei simboli b_k prodotti dalla sorgente; - - . rielaborare questi simboli attraverso un CODIFICATORE che li trasforma nei simboli a_k. Il codificatore è una macchina a stati finiti per la quale

$$a_k = f(b_k, S_k)$$

nella quale S_k è lo stato interno definito come

$$S_{k+1} = g(b_k, S_k)$$

I simboli a_k sono poi trasmessi attraverso un tx PAM.



con $s(t) = \sum_k a_k\, p(t-kT)$

Considériamo allora un codificatore impiegato per produrre CODICI DI LINEA AMI (Alternate Mark Inversion): ad ogni trasmissione di un uno si inverte il segno. Allora lo stato è definito

Va bene anche il contrario, basta che memorizzi l'ultima trasmissione

$$S_k = \begin{cases} 1 & \text{se la volta precedente si ha tx } 1 \\ -1 & \text{se la volta precedente si ha tx } -1 \end{cases}$$

S_k va inizializzato a 1 o -1 in maniera arbitraria

La funzione di uscita invece sarà:

$$a_k = b_k(-S_k) = -b_k S_k$$

La legge di transizione di stato sarà

$$S_{k+1} \overset{S_k(-1)^{a_k}}{=} S_k(1-2b_k)$$ Se b_k è nullo $S_{k+1} = S_k$ 138

Se b_k è uno si inverte lo stato.

Supponiamo che b_k rappresenti il sistema binario

$$b_k \in \{0,1\}$$

allora

$$a_k \in \{0,1,-1\}$$

Calcoliamo l'autocorrelazione del processo a_k

$$R_a(m) = \mathbb{E}\{a_{k+m}\, a_k\} = \mathbb{E}\{-(b_{k+m}S_{k+m})(-b_k S_k)\} =$$

$$= \mathbb{E}\{(b_{k+m}\, b_k)\, S_k\, S_{k+m}\}$$

Vediamo alcuni casi

$m=0$ $\quad R_a(0) = \mathbb{E}\{b_k^2\, S_k^2\} = \mathbb{E}\{b_k^2\} = \frac{1}{2}$

perchè b_k e S_k sono indipendenti e siccome S_k vale 1 o -1 $\mathbb{E}\{S_k^2\} = 1$

$m=1$ $\quad R_a(1) = \mathbb{E}\{b_{k+1}\, b_k\, S_{k+1}\, S_k\} =$

$$= \mathbb{E}\{b_{k+1}\, b_k\, S_k^2(1-2b_k)\} =$$

Siccome b_k, b_{k+1} e S_k sono indipendenti e $\mathbb{E}\{S_k^2\} = 1$

$$= \mathbb{E}\{b_{k+1}\, b_k(1-2b_k)\} =$$

$$= \mathbb{E}\{b_k\, b_{k+1}\} - 2\,\mathbb{E}\{b_k^2\, b_{k+1}\} =$$

$$= \mathbb{E}\{b_k\}\,\mathbb{E}\{b_{k+1}\} - 2\,\mathbb{E}\{b_k^2\}\,\mathbb{E}\{b_{k+1}\} =$$

$$= \frac{1}{4} - \cancel{2}\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \quad -\frac{1}{4}$$

$m = 2 \quad R_a(2) = \mathbb{E}\{ b_{k+2} b_k \delta_k \quad \delta_k \} = 0$

Calcolando $R_a(m)$ per $m \geq 2$ otteniamo zero.

Siccome l'autocorrelazione è pari

$$R_a(-1) = R_a(1) = -\frac{1}{4}$$

$$R_a(0) = \frac{1}{2}$$

$$R_a(-2) = R_a(2) = 0$$

$$\vdots$$

$$R_a(-m) = R_a(m) = 0 \quad \text{per } m > 2$$

Procedendo

$$W_a(f) = \sum_m R_a(m) e^{-j2\pi m f T} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-j2\pi f T} - \frac{1}{4} e^{j2\pi f T} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi f T)$$

Se $p(t)$ è un coseno rialzato $|P(f)|^2 = G(f)$

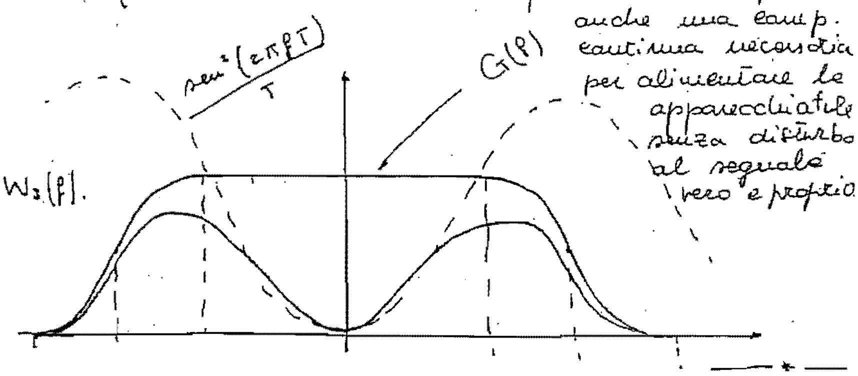
$$W_s(f) = \frac{W_a(f)}{T} |P(f)|^2 = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\pi f T)\right)}{T} G(f) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2(2\pi f T)}{T} G(f)$$

Il fatto che il segnale abbia componenti spettrali nulle in zero è utile perché in questo modo si può Tx anche una comp. continua necessaria per alimentare le apparecchiature senza disturbo al segnale vero e proprio

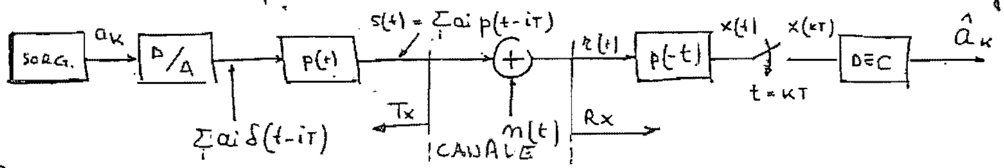
quindi:

Il codificatore ha sagomato $W_s(f)$.



MODULAZIONE PAM M-ARIA

Il sistema può essere schematizzato nel modo seguente



Sia a_K il simbolo tratto da un alfabeto A di M simboli

$$\boxed{a_K \in A = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \pm(M-1)\}}$$

indipendenti ed equivalenti.

$$\left(x(kT) = a_K \underset{k=i}{g(0)} + \sum_{k\neq i} a_i \left[(k-i)T\right] + n_1(kT) \right) \qquad g(0)=g_0$$

$$\boxed{x(t) = \sum_i a_i\, g(t-kT) + n_1(t)}$$

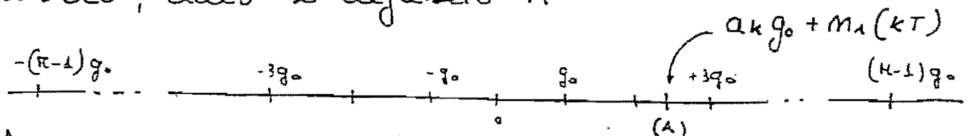
$n_1(t)$, ottenuto dal filtraggio di $n(t)$, è gaussiano a media nulla, con varianza

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2\, df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} G(f)\, df = \frac{N_0}{2} g_0 = \frac{N_0 E_p}{2}$$

E' necessario capire come costruire il "decisore" affinché, sulla base di $x(kT)$, venga determinata a_K. In assenza di rumore riceviamo

$$x(kT) = a_K g_0$$

ovvero, dato l'alfabeto A



Il rumore $n_1(t)$ fa in modo che $x(kT)$ cada all'interno degli intervalli considerati, ad esempio in (A). Il decisore dovrà avere M-2 soglie λ_i.
Se gli eventi fossero equiprobabili si può scegliere come soglia il pt. medio fra i due simboli.
Logicamente a seconda della "costellazione" di simboli alcuni di essi risulteranno più protetti di altri.
Nel caso generale quindi si usa un DECISORE a M-2 SOGLIE. Calcoliamo la PROBABILITÀ DI ERRORE SU SIMBOLO in sostanza sappiamo che, per definizione

$$P_s \begin{pmatrix}\text{Probabilità di}\\ \text{Errare un simbolo}\end{pmatrix} = P(\hat{a}_k \neq a_k) =$$

Teorema della Probabilità Totale. 141

$$= \sum_{\alpha \in A} P(\hat{a}_k \neq a_k \mid a_k = \alpha)\, P(a_k = \alpha) =$$

Probabilità di errare condizionata alla trasm del carattere qualsiasi $\alpha \in A$

Se i simboli sono equiprobabili

$$P(a_k = \alpha) = \frac{1}{M}$$

$$= \boxed{\frac{1}{M} \sum_{\alpha \in A} P(\hat{a}_k \neq a_k \mid a_k = \alpha)} \quad (14.1)$$

Supponiamo α interno, ovvero $\alpha \neq M-1$ e $\alpha \neq -(M-1)$:

$$P(\hat{a}_k \neq a_k \mid a_k = \alpha) =$$

$$= P\{\underbrace{x(kT) > (\alpha+1) g_0}_{\text{è più grande di...}} \mid a_k = \alpha\} + P\{\underbrace{x(kT) < (\alpha-1) g_0}_{\text{è più piccolo di...}} \mid a_k = \alpha\}$$

Sono eventi disgiunti xchè è impossibile che $x(kT)$ sia contemp. maggiore di una soglia e minore di un'altra più piccola.

$$= P\{\alpha g_0 + m_1(kT) > (\alpha+1) g_0\} +$$

$$+ P\{\alpha g_0 + m_1(kT) < (\alpha-1) g_0\} =$$

Sostituendo ad $x(kT)$ la sua espressione che tiene conto di α, ovvero

$$x(kT) = \alpha g_0 + m_1(kT)\,.$$

inserisco la condizione $a_k = \alpha$ nell'evento ①, ⇒ possiamo togliere il condizionamento.

$$= P\{m_1(kT) > g_0\} + P\{m_1(kT) < -g_0\} =$$

dividendo per σ diventano v.c. gaussiane STANDARD $> \frac{g_0}{\sigma}$

$$= P\left\{\frac{m_1(kT)}{\sigma} > \frac{g_0}{\sigma}\right\} + P\left\{\frac{m_1(kT)}{\sigma} < -\frac{g_0}{\sigma}\right\}$$

$$= 2P\left\{\frac{m_1(kT)}{\sigma} > \frac{g_0}{\sigma}\right\} = 2Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right) \quad (14.2)$$

essendo $m_1(kT)/\sigma$ gaussiana la prob che sia magg. è uguale a quella che sia minore (per simmetria)

Supponiamo ora che α sia un ESTREMO; poniamo $\alpha = M-1$, perchè il caso $\alpha = -(M-1)$ è identico con uguale probabilità.

$$P(\hat{a}_k \neq a_k \mid a_k = M-1) = P\left(x(kT) < (M-2)g_0 \mid a_k = M-1\right) =$$

$$= P\{(M-1)g_0 + n_1(kT) < (M-2)g_0\} = P\{n_1(kT) < -g_0\} = Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right) \quad (14.3)$$

Tornando all'espressione di P_s data dalla (14.1), inserendo i risultati (14.2) e (14.3) otteniamo

$$P_s = P(\hat{a}_k \neq a_k) = \frac{1}{M}\left[\underbrace{(M-2)\,2Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)}_{\text{M-2 simboli interni}} + \underbrace{2Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)}_{\text{due simboli agli estremi}}\right] =$$

$$= \frac{1}{M}Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)\left[2(M-2)+2\right] = \boxed{2\left(1-\frac{1}{M}\right)Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)} \quad (14.4)$$

Consideriamo ad esempio il caso di $M = 4$; l'alfabeto diviene:

$$A = \{\pm 1, \pm 3\}$$

00	01	11	10	(M. GRAY)
00	01	10	11	(M. NATURALE)
-3	-1	1	3	

Supponiamo che la sorgente produca il simbolo 1, trasmesso da Tx ricevuto da Rx; supponiamo che il decisore commetta un errore e decida per il simbolo -1. In generale i simboli di A derivano da un codice binario; in base ad una mappa M si passa dal codice binario al simbolo. In ricezione in base ad una mappa M^{-1} si passa dal simbolo al codice binario. Se avessimo associato bit e simboli nel modo seguente (MAPPA NATURALE) all'errore su simbolo corrispondono DUE errori sul bit; vengono erroneamente valutati entrambe i bit b_0 e b_1.

$1 \longrightarrow 10$
$3 \longrightarrow 11$
$-1 \longrightarrow 01$
$-3 \longrightarrow 00$
$\quad\quad\quad\;\; b_0 b_1$

Si può pensare che impiegando una mappatura differente ad un errore sul simbolo corrisponda un solo errore su bit. Questo risultato può essere ottenuto con una MAPPA GRAY.

La mappa Gray associa a simboli adiacenti configurazioni di bit che differiscano fra loro solo di un bit 143

ad esempio assegnando $-1 \rightarrow 01$

$1 \rightarrow 11$

Si ha un solo bit che cambia.

Siccome il rumore tipicamente è piccolo e a media nulla associando ai simboli una "mappatura Gray" si fa in modo che un errore su bit significhi l'interpretazione di un simbolo come quello adiacente a quello realmente trasmesso.

Osserviamo che la probabilità di errare sul simbolo P_s equivale al rapporto fra il numero di simboli errati N_{SE} e quelli trasmessi N_{ST}

$$\boxed{P_s = 2\left(1-\frac{1}{M}\right) Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{N_0}}\right) = \frac{N_{SE}}{N_{ST}}}$$

La probabilità di errare sul bit sarà invece

$$\boxed{P_b = \frac{N_{bE}}{N_{bT}} = \frac{N_{bE}}{N_{ST}\cdot \log_2 M} =}$$

Applicando una MAPPA GRAY

$$\boxed{N_{SE} \cong N_{BE}}$$

allora la probabilità di errare su bit

$$P_b = \frac{N_{be}}{N_{bT}} = \frac{N_{SE}}{N_{ST}\log_2 M} \cong \frac{P_s}{\log_2 M} =$$

$$\boxed{= \frac{2}{\log_2 M}\left(1-\frac{1}{M}\right) Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{N_0}}\right)}$$

Un segnale PAM M-ario, può essere scritto come

$$s(t) = \sum_i a_i\, p(t-iT)$$

ad ogni simbolo sarà associata una Energia

$$a_i\, p(t-iT) \longrightarrow \boxed{a_i^2 E_p}$$

e mediamente

$$E_s = \mathbb{E}\{a_i^2 E_p\} = \mathbb{E}\{a_i^2\} E_p = \boxed{\frac{M^2-1}{3} E_p}$$

per ogni bit invece

$$\boxed{E_b = \frac{E_s}{\log_2 M} = \frac{M^2-1}{3\log_2 M} E_p}$$

allora

$$E_p = \frac{3\log_2 M}{M^2-1} E_b$$

La probabilità di errare sul bit diviene

$$\boxed{P_b = \frac{2}{\log_2 M}\left(1-\frac{1}{M}\right) Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2 M\, E_b}{(M^2-1) N_0}}\right)}$$

Prendendo

$$s(t) = \sum_i a_i\, p(t-iT)$$

$$W_s(f) = \frac{M^2-1}{3T} |P(f)|^2$$

Il tempo per trasmettere un bit sarà uguale alla durata dell'intervallo di segnalazione diviso il numero di bit associati a ciascun simbolo

$$T_b = \frac{T}{\log_2 M} \Rightarrow \boxed{T = T_b \log_2 M}$$

La banda del segnale PAM risulta

$$\boxed{B_s = \frac{1}{2T} = \frac{1}{2T_b \log_2 M}}$$

Si può osservare che l'efficienza spettrale è tanto maggiore quanto maggiore è M. L'efficienza energetica invece cala all'aumentare di M.

se ho la prob. sul simbolo come si fa ho trovare la prob di errore sul bit

N_{se} = n° errore
N_{sT} = n° simboli trasmessi

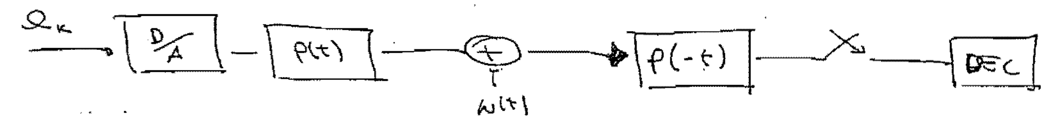
$$P_s = \frac{N_{se}}{N_{sT}} \simeq \frac{N_{be}}{N_{bT} \cdot \frac{1}{\log_2 M}} = P_b \log_2 M$$

$N_{bT} = N_{sT} \log_2 M$

$$P_b = P_s / \log_2 M$$

$$E_p = \int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f)\, df = g(0) = 1$$

calcolo dell'errore con alfabeto M-ario



$$g(t)=p(t)\otimes p(-t) \qquad g_\ell=\begin{cases}1 & \ell=0\\ 0 & \ell\neq 0\end{cases} \qquad X(mT)=a_m+n(mT)$$

$$a_k \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$$

$$P(\hat{a}_m \neq a_m)=\sum_{\alpha=\{\pm1,\pm3\dots\pm(M-1)\}} P(\hat{a}_m \neq a_m / a_m=\alpha)\underbrace{P(a_m=\alpha)}_{\frac{1}{M}} \qquad \frac{1}{M}\sum_\alpha P(\hat{a}_m \neq a_m / a_m=\alpha)$$

mi interessano solo 2 casi, quando α è interno ($\alpha=\pm1$)

$$P(\hat{a}_m \neq a_m / a_m=\alpha)=P\{X(mT)>\alpha+1 \vee X(mT)<\alpha-1 / a_m=\alpha\}$$

$$=P\begin{pmatrix}\alpha+n(mT)>\alpha+1\\ o\\ \alpha+n(mT)<\alpha-1\end{pmatrix}=P(n(mT)>1 \vee n(mT)<-1)=2P\left(\frac{n(mT)}{\sigma}>\frac{1}{\sigma}\right)=2Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

guardo il caso esterno

$$P(\hat{a}_m \neq a_m / a_m=-(M-1))=P(X(mT)>-(M-2)/a_m=-(M-1))=P(-(M-1)+n(mT)>-(M-2))$$

$$=P(n(mT)>1)=Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

in totale

$$\frac{1}{M}\sum P(\hat{a}_m \neq a_m / a_m=\alpha)=\frac{1}{M}\left[(M-2)2Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)+2Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right]=\frac{2}{M}(M-1)Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

probabilità di errore su PAM M-ARIA

$\boxed{Es}$ ho una ~~dim~~ trasmissione quaternaria

	-3	-1	1	3	
prendo i bit a coppie	00	01	10	11	naturale
	00	01	11	10	gray

cerchiamo di minimizzare la prob di errore sul bit

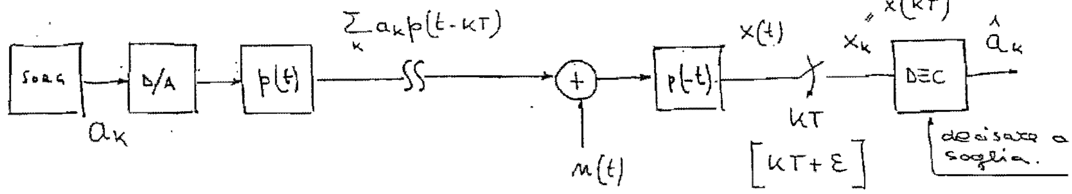
Gray per 3 bit
000
001
011
010
110
111
101
100

INTERFERENZA INTERSIMBOLICA E PROBABILITA' D'ERRORE 1/15

Si consideri un sistema binario con alfabeto

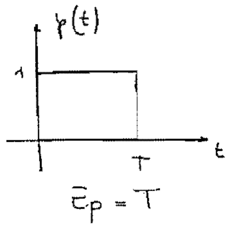
$$a_k \in \{\pm 1\}$$

consideriamo un impulso $p(t)$ e supponiamo i simboli indipendenti e equiprobabili.



Come già ricavato se $\Pi = 2$ la probabilità di errare risulta

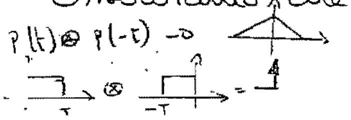
$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2T}{N_0}}\right)$$



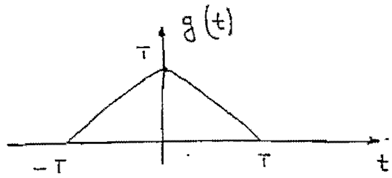
$E_p = T$

— Valutiamo il funzionamento del sistema se viene introdotto un ritardo ε nel campionamento (avendo supposto la durata D dell'impulso pari all'intervallo di segnalazione T).

Osserviamo che



$$g(kT) = \begin{cases} T & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$



Sappiamo che

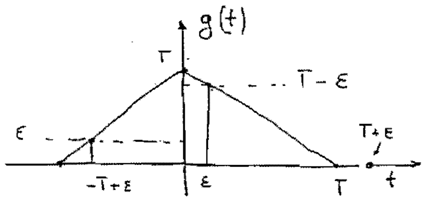
$$x(t) = \sum_\ell a_\ell\, g(t-\ell T) + n_1(t)$$

$t = kT+\varepsilon$

$$x(kT+\varepsilon) = \sum_\ell a_\ell\, g(kT-\ell T+\varepsilon) + n_1(kT+\varepsilon)$$

$g(kT+\varepsilon-\ell T) = g((k-\ell)T+\varepsilon)$

$$= \sum_\ell a_\ell\, g\left[T(k-\ell)+\varepsilon\right] + n_1(kT+\varepsilon) =$$



$$= a_k \overbrace{g(\varepsilon)}^{T-\varepsilon} + a_{k+1} \overbrace{g(-T+\varepsilon)}^{\varepsilon} +$$

$$+ \cancel{a_{k-1}\, \underbrace{g(T+\varepsilon)}_{0}} + \ldots + n_1(kT+\varepsilon) =$$

$$= a_k (T-\varepsilon) + \varepsilon\, a_{k+1} + n_1(kT+\varepsilon)$$

Calcoliamo la probabilità di errare

perchè indip

$P(a_k=1, a_{k-1}) = P(a_{k-1})P(a_{k-1}=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$$P_b(\varepsilon) = P(\hat{a}_k \neq a_k) =$$

$$= P(\hat{a}_k \neq a_k \mid a_k = 1, a_{k-1} = 1)\,\overbrace{P(a_k = 1, a_{k-1} = 1)}^{\frac{1}{4}} +$$

$$+ P(\hat{a}_k \neq a_k \mid a_k = 1, a_{k-1} = -1)\,\overbrace{P(a_k = 1, a_{k-1} = -1)}^{\frac{1}{4}} +$$

$$+ P(\hat{a}_k \neq a_k \mid a_k = -1, a_{k-1} = 1)\,\overbrace{P(a_k = -1, a_{k-1} = 1)}^{\frac{1}{4}} +$$

$$+ P(\hat{a}_k \neq a_k \mid a_k = -1, a_{k-1} = -1)\,\overbrace{P(a_k = -1, a_{k-1} = -1)}^{\frac{1}{4}} = \quad (15.1)$$

Inoltre con il decisore a soglia

$$P(\hat{a}_k \neq a_k \mid a_k = 1, a_{k-1} = \alpha) =$$

$$= P\{x(kT+\varepsilon) < 0 \mid a_k = 1, a_{k-1} = \alpha) =$$

$$= P\{T - \varepsilon + \varepsilon\alpha + n_1(kT+\varepsilon) < 0\} =$$

$$= P\{n_1(kT+\varepsilon) < -[T + \varepsilon\alpha - \varepsilon]\} =$$

$$= P\left\{\frac{n_1(kT+\varepsilon)}{\sigma} < -\frac{T-\varepsilon+\varepsilon\alpha}{\sigma}\right\} = Q\left(\frac{T-\varepsilon+\varepsilon\alpha}{\sigma}\right)$$

dividendo per σ si riconduce n_1 ad una gauss. standard.

$$\frac{T}{\sigma} = \frac{T}{\quad}$$

Analogamente

$$P(\hat{a}_k \neq a_k \mid a_k = -1, a_{k-1} = \alpha) = Q\left(\frac{T-\varepsilon-\varepsilon\alpha}{\sigma}\right)$$

Tornando alla (15.1), sostituendo

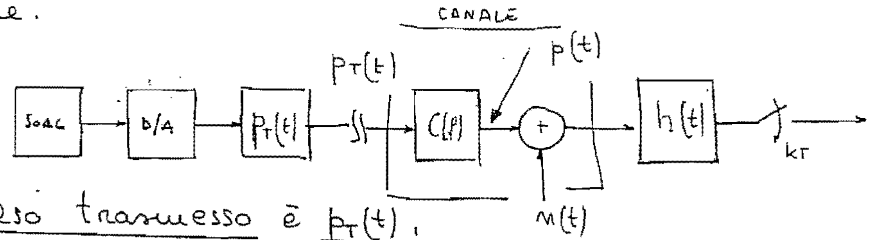
$$P_b(\varepsilon) = \frac{1}{2}Q\left(\frac{T}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{T-2\varepsilon}{\sigma}\right)$$

Osserviamo che se $\varepsilon = 0$ si torna all'espressione del caso ottimo ( ). Ovviamente all'aumentare di ε, cioè all'aumentare dell'ISI, aumenta la probabilità di errare.

Il rumore genera ISI: mi sposta le δ.

EQUALIZZAZIONE

Consideriamo ora il comportamento da filtro $C(f)$ del canale; il sistema può essere schematizzato come segue.



Se l'impulso trasmesso è $p_T(t)$, passa attraverso il canale $c(t)$ e ne esce "distorto". Se il canale è tempo invariante, la $c(t)$ è nota, perciò

$$p(t) = p_T(t) \otimes c(t)$$

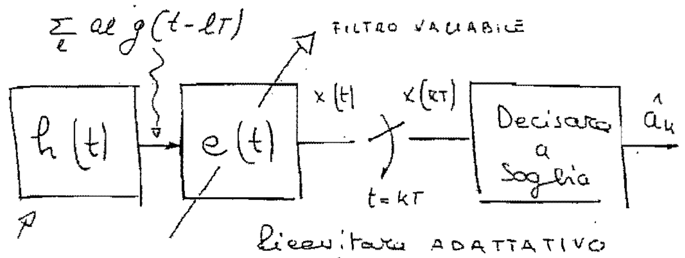
Il filtro frontale del ricevitore deve essere ADATTATO a $p(t)$ anziché a $p_T(t)$; in particolare

$$G(f) = \underbrace{P_T(f)\,C(f)}_{P(f)}\,P^*(f) = \text{Condizione di Nyquist}$$

soddisfacendo la condizione di Nyquist.

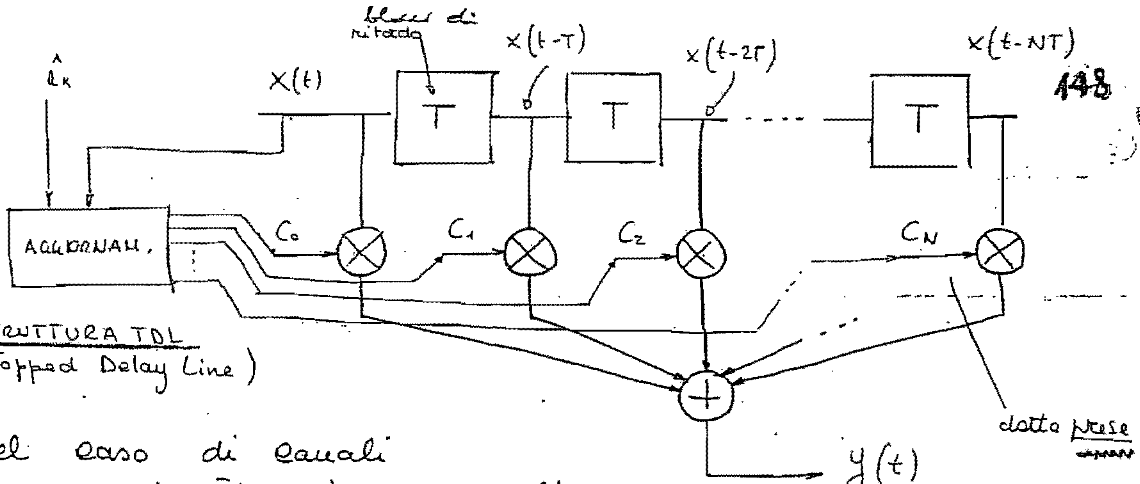
Se il canale non è tempo invariante, non è possibile determinare a priori $p(t)$ e quindi non è possibile determinare il filtro adattato. In generale allora si considera come ricevitore il seguente:

Il filtro frontale ha una risposta in frequenza $H(f)$ passa basso oppure



ADATTATO ALL'IMPULSO TRASMESSO $p_T(t)$. Il secondo filtro, detto EQUALIZZATORE, ha una risposta in frequenza variabile dall'esterno. In generale la sua struttura può essere rappresentata come segue.

148



STRUTTURA TDL
(Tapped Delay Line)

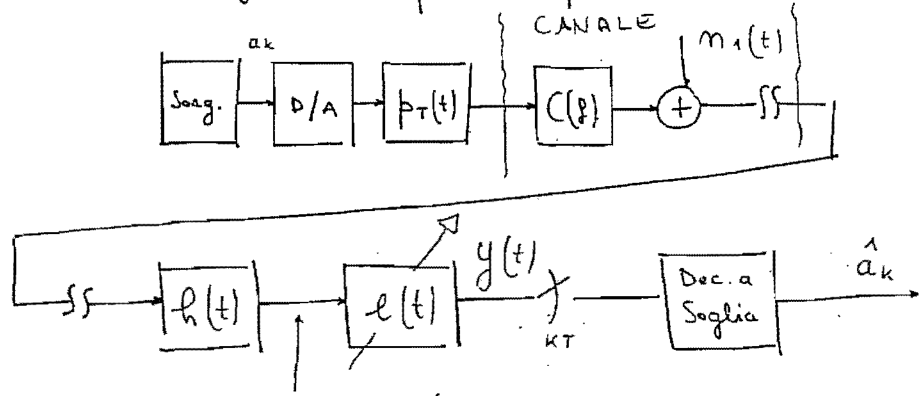
Nel caso di canali tempo varianti, ci sono degli algoritmi che aggiornano in tempo reale i coefficienti c_i in base alle decisioni già prese $\hat{a}_k$ e al segnale ricevuto e prefiltrato.

$h(t) = \sum e_l \, \delta(t - lT)$

$E(f) = \sum e_l \, e^{-j2\pi f l T}$

CRITERIO ZERO FORCING

Per il dimensionamento degli equalizzatori esistono diversi criteri fra i quali quello dello ZERO FORCING.



$$x(t) = \sum_l a_l \, g(t - lT) + n_1(t)$$

L'operazione dell'equalizzatore può essere riassunta come segue.

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k \, x(t - kT) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} c_k \left\{ \sum_l a_l \right\} g(t - lT - kT) + \sum_{k=0}^{N} c_k \, n_1(t - kT) =$$

$$= \sum_{\ell} a_\ell \sum_{k=0}^{N} c_k\, g(t-\ell T-kT) + n_2(t) =$$

$$= \sum_{\ell} a_\ell\, q(t-\ell T) + n_2(t) \qquad y(kT) = \sum_{\ell} a_\ell\, q[(k-\ell)T] + n_2(kT)$$

Osserviamo che

$$q(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k\, g(t-kT)$$

CONDIZIONE VOLUTA PER NON AVERE ISI

con

$$q(mT) = \begin{cases} 1 & m = m_0 \\ 0 & m \neq m_0 \end{cases} = \sum_{k=0}^{N} c_k\, g[(m-k)T]$$

$$\Rightarrow y(kT) = a_{k-m_0} + n_2(kT)$$

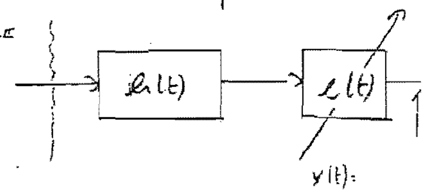
Dimensionare il dispositivo di equalizzazione, significa risolvere infinite equazioni in $N+1$ incognite. Allora non si ha la soluzione ottima ma solo approssimata

Il criterio dello "zero forcing" guarda solo i campioni precedenti, trascurando completamente il rumore; ciò che succede il più delle volte è che il rumore $n_2(t)$ ne esce amplificato, con un conseguente peggioramento del rapporto S/N.

Per calcolare c_k si FORZANO a ZERO I CAMPIONI

Supponiamo che il filtro frontale abbia espressione

$$g(kT) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0{,}2 & k = 1 \\ -0{,}1 & k = -1 \\ 0 & |k| \geq 2 \end{cases}$$



il segnale sarà quindi in uscita da esso

$$x_k = a_k\, g(0) + a_{k+1}\, g(1) + a_{k-1}\, g(-1) + n_1(t)$$

Sappiamo che

$$q(mT) = \sum_{k=0}^{N} c_k\, g[(m-k)T]$$

Supponiamo di volere un equalizzatore a 3 prese cioè $N=2$, quindi

$$q(mT) = \sum_{k=0}^{2} C_k\, g[(m-k)T] = C_0\, g(mT) + C_1\, g((m-1)T) + C_2((m-2)T)$$

A questo punto si deve imporre la condizione

$$q(mT) = \begin{cases} 1 & m = m_0 \\ 0 & m \neq m_0 \end{cases} \quad \text{con } m_0 \text{ arbitrario}$$

allora, prendiamo $m_0 = 1$, la condizione diviene

$$q(0) = 0 \qquad q(1) = 1 \qquad q(2) = 0$$

che si traduce nelle equazioni

$$\begin{cases} q(0) = C_0\, g(0) + C_1\, g(-1) + C_2\, g(-2) = 0 \\ q(1) = C_0\, g(1) + C_1\, g(0) + C_2\, g(-1) = 1 \\ q(2) = C_0\, g(2) + C_1\, g(1) + C_2\, g(0) = 0 \end{cases}$$

dal quale

$$C_0 = 0{,}1 \quad (0{,}096)$$
$$C_1 = 0{,}96$$
$$C_2 = -0{,}18 \quad (-0{,}19?)$$

Come si fa?

Osserviamo che

$$y(kT) = a_{k-1} + a_{k-3}(-0{,}1) - 0{,}1\, a_k + n_2(kT)$$

Si verifica ancora ISI, ma in maniera attenuata.

$$y(kT) = \sum_\ell a_\ell\, q[(k-\ell)T] + n_2(kT) =$$

$$= \sum_\ell a_\ell \Big[C_0\, g[(k-\ell)T] + C_1\, g[(k-\ell-1)T] + C_2\, g[(k-\ell-2)T]\Big] =$$

$$=$$

$k-\ell = m_0 \Rightarrow \ell = k - m_0$
$k-\ell-1 = m_0 \Rightarrow \ell = k - m_0 - 1$
$k-\ell-2 = m_0 \Rightarrow \ell = k - m_0 - 2$

ESERCIZIO

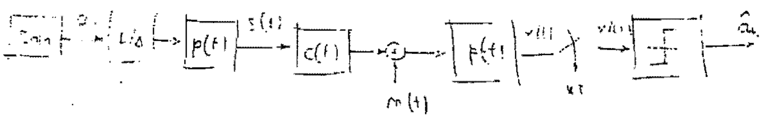
Si consideri il sistema di figura, con

- $a_k \in \{\pm 1\}$ equiprobabili e indipendenti
- l'impulso $p(t)$ radice di coseno rialzato con α

definiamo anche

- $g_N(t) = p(t) \otimes p(-t) \qquad g_N(kT) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$

$g_N(0) = E_p = 1$

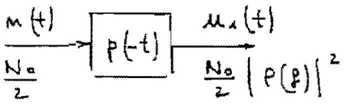


Supponiamo che il canale abbia risposta all'impulso

$c(t) = \delta(t)$ (CASO IDEALE) progettare ricevitore ottimo e prob di errore

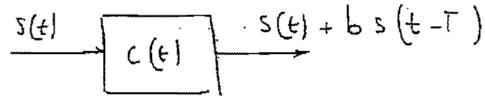
la prob. di errore nel caso ideale risulta

$$P_b^{(id)} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_p}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2}{N_0}}\right) = Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$



$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2}\int |P(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} E_p = \frac{N_0}{2}$$

Supponiamo ora che il canale sia REALE modellato dal seguente schema



ovvero con una risposta

$$c(t) = \delta(t) + b\,\delta(t-T) \qquad 0 \leq b < 1$$

Il canale ha risposta in frequenza

$$C(f) = 1 + b e^{-j2\pi f T} = \left| \sqrt{1 + b^2\cos^2 2\pi f t_0 + 2b\cos 2\pi f t_0 + b^2 \sin^2 2\pi f t_0} = \sqrt{1 + b^2 + 2b\cos 2\pi f t_0} \right.$$

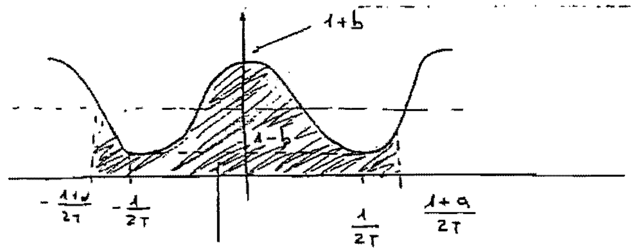
$$= \left(1 + b\cos 2\pi f T\right) + j b \sin 2\pi f T$$

$$|C(f)| = \sqrt{1 + \qquad}$$

$$= \sqrt{(1+b^2) + 2b\cos(2\pi f\ )} = \begin{cases} \xrightarrow{f=0} \sqrt{(1+b)^2} = 1+b \\ \xrightarrow{f=\frac{1}{2T}} \sqrt{(1-b)^2} = 1-b \end{cases}$$

L'impulso ha banda (il roll off α)

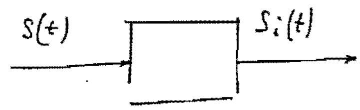
$$B_p = \frac{1+\alpha}{2T}$$



Questa è la zona in cui c'è il segnale utile e risulta ~~risulta fortemente distorto~~

Osserviamo che

$$s(t) = \sum_i a_i\, p(t - iT)$$
$$s_i(t) = \sum_i a_i\, p_R(t - iT)$$



$$\text{con} \quad p_R(t) = p(t) \otimes c(t) = p(t) + b\,p(t-T)$$

In questo caso c'è ISI, quindi dovremmo cambiare il filtro adattato e il decisore a soglia in uno di Viterbi. Proviamo a lasciare tutto inalterato e analizziamo come degradano le prestazioni.
In uscita dal filtro adattato

$$x(t) = \sum_i a_i\, g(t - iT) + n_1(t)$$

stesso rumore come nel caso del canale non ideale

nella quale

$$g(t) = p_R(t) \otimes p(-t) = p(t) \otimes c(t) \otimes p(-t) =$$

$$= g_N(t) \otimes c(t) = g_N(t) + b\, g_N(t - T)$$

campionando

$$g(kT) = g_N(kT) + b\, g_N[(k-1)T] = \delta_k + b\,\delta_{k-1} =$$

$$\delta_k = \text{delta di Kronecker}$$

$$g(kT) = \delta_k + b\delta_{k-1} = \begin{cases} 1 & k=0 \\ b & k=1 \\ 0 & k \neq 0,1 \end{cases}$$

Calcoliamo la probabilità di errare

$$P_b^{(REALE)} = P(a_k \neq \hat{a}_k) = \frac{1}{4}\Big[P(a_k \neq \hat{a}_k \,|\, a_k = 1, a_{k-1} = 1) +$$
$$+ \frac{1}{4}P(a_k \neq \hat{a}_k \,|\, a_k = 1, a_{k-1} = -1) + P(a_k \neq \hat{a}_k \,|\, a_k = -1, a_{k-1} = 1)\frac{1}{4}$$
$$+ P(a_k \neq \hat{a}_k \,|\, a_k = -1, a_{k-1} = -1)\frac{1}{4} = \quad (*)$$

come già visto in teoria

$$P(a_k \neq \hat{a}_k \,|\, a_k = 1, a_{k-1} = \alpha) = P(x(kT) < 0 \,|\, a_k = 1, a_{k-1} = \alpha) =$$
$$= P(1 + b\alpha + n_1(kT) < 0) = P(n_1(kT) < -(1 + b\alpha)) =$$
$$= Q\left(\frac{1 + b\alpha}{\sigma}\right)$$

analogamente per gli altri termini riscriviamo la $(*)$

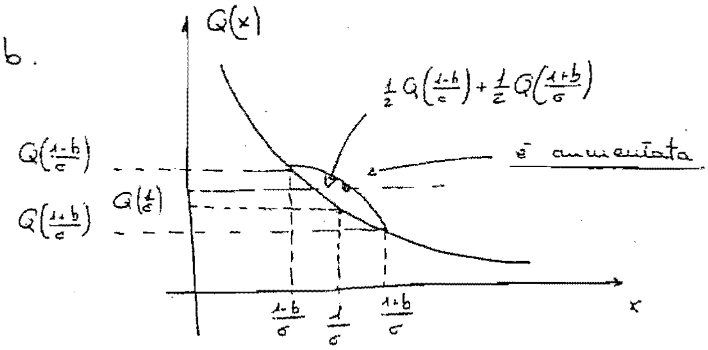
$$P_b^{(REALE)} = \left[Q\left(\frac{1+b\alpha}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{1-b\alpha}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{1+b\alpha}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{1-b\alpha}{\sigma}\right)\right]\frac{1}{4} =$$

Confrontiamo il caso reale e il caso ideale per $\alpha = 1$

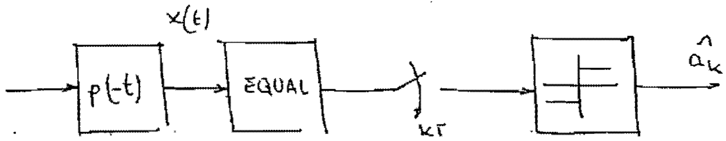
$$P_b^{(ID)} = \frac{1}{2}Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$
$$P_b^{(REALE)} = \frac{1}{2}Q\left(\frac{1+b}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{1-b}{\sigma}\right)$$

e si osserva un aumento della prob. di errare.

$$\frac{dQ(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$\frac{d^2Q(x)}{dx^2} = \frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Anziché cambiare l'intero ricevitore, inseriamo un equalizzatore (prima o dopo il campion. è indifferente) come segue e decidiamo ancora a soglia

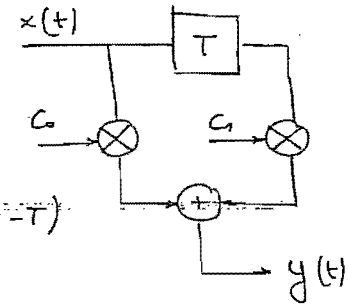


Consideriamo un equalizzatore a due prese

Sappiamo che

$$y(t) = \sum_i a_i \, q(t - iT) + n_2(t)$$

con



$$q(t) = \sum_{\ell=0}^{1} C_\ell \, g(t - \ell T) = C_0 g(t) + C_1 g(t-T)$$

$$n_2(t) = C_0 n_1(t) + C_1 n_1(t-T)$$

campionando

$$q(kT) = C_0 g(kT) + C_1 g[(k-1)T] =$$

$$= C_0 [\delta_k + b\delta_{k-1}] + C_1 [\delta_{k-1} + b\delta_{k-2}] =$$

$$= C_0 \delta_k + (C_0 b + C_1)\delta_{k-1} + C_1 b \delta_{k-2} =$$

$$= \begin{cases} C_0 & k = 0 \\ C_0 b + C_1 & k = 1 \\ C_1 b & k = 2 \\ 0 & k \neq 0,1,2 \end{cases}$$

Calcoliamo C_0 e C_1 con lo "zero forcing".

Proviamo i vari casi:

① $\begin{cases} q(0) = 0 = C_0 \\ q(T) = 1 = C_1 + C_0 b = C_1 \end{cases}$ Non va bene perché è un semplice ritardatore

② $\begin{cases} q(T) = 1 \\ q(2T) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} C_0 b + C_1 = 1 \\ C_1 b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_0 = 1/b \\ C_1 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} q(0) = 1 \\ q(T) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = 1 \\ C_1 = -b \end{cases} \Rightarrow q(kT) = \begin{cases} C_0 = 1 & k=0 \\ b-b=0 & k=1 \\ -b^2 & k=2 \\ 0 & k \neq 0,1,2 \end{cases}$$

$$y(kT) = a_k - b^2 a_{k-2} + n_2(kT)$$

In questo senso si può sperare che le prestazioni siano migliorate; il termine interferente a_{k-2} è pesato con b^2 e, siccome $0<b<1$, è diminuito; ciò non basta per sapere se effettivamente l'EQ. è sufficientemente accurata, $n_2(kT)$ è diverso da n_1. Attraverso analoghi passaggi si può verificare che

$$P_b^{(EQ)} = \frac{1}{2} Q\left(\frac{1+b^2}{\sigma_2}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{1-b^2}{\sigma_2}\right)$$

nella quale σ_2^2 è la varianza di n_2.

$$\sigma_2^2 = E\left\{n_2^2(t)\right\} = E\left\{\left[C_0 n_1(t) + C_1 n_1(t-T)\right]^2\right\} =$$

$$= E\left\{C_0^2 n_1^2(t) + C_1^2 n_1^2(t-T) + 2C_0C_1 n_1(t) n_1(t-T)\right\} =$$

$$= E\left\{C_0^2 n_1^2(t)\right\} + E\left\{C_1^2 n_1^2(t-T)\right\} + E\left\{2C_0C_1 n_1(t) n_1(t-T)\right\} =$$

$$= \underbrace{C_0^2 E\left\{n_1^2(t)\right\}}_{\sigma^2} + C_1^2 \underbrace{E\left\{n_1^2(t-T)\right\}}_{\sigma^2 \text{ perchè staz. in senso lato e quindi ind. dal tempo}} + 2C_0C_1 \underbrace{E\left\{n_1(t) n_1(t-T)\right\}}_{R_{n_1}(T)}$$

$$\frac{N_0}{2}|P(f)|^2 = \frac{N_0}{2} G_N(f)$$

$$\Rightarrow \frac{N_0}{2} g_N(\tau)$$

$$n(t),\ \frac{N_0}{2} \rightarrow \boxed{p(-t)} \rightarrow n_1(t),\ \frac{N_0}{2}|P(f)|^2$$

$$\Rightarrow R_{n_1}(T) = \frac{N_0}{2} g_n(T)$$

ma $g_N(kT) = 0$ per $k = 1$

$$\Rightarrow R_{n_1}(T) = 0$$

$$n(t),\ \frac{N_0}{2} \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow n_1(t),\ \frac{N_0}{2}|\quad|^2 \overset{(TFC)^{-1}}{\Longleftrightarrow} R_{n_1}(\tau) = \frac{N_0}{2} h(t) \otimes h(-t)$$

MODULAZIONI NUMERICHE IN BANDA PASSANTE

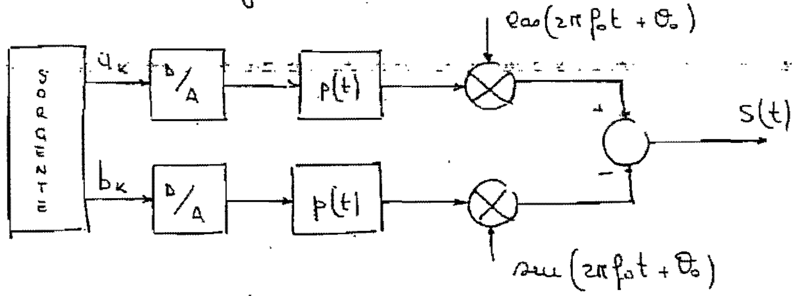
Un segnale modulato numericamente in banda base può essere scritto come

$$s'(t) = \sum_k a_k \, p(t-kT)$$

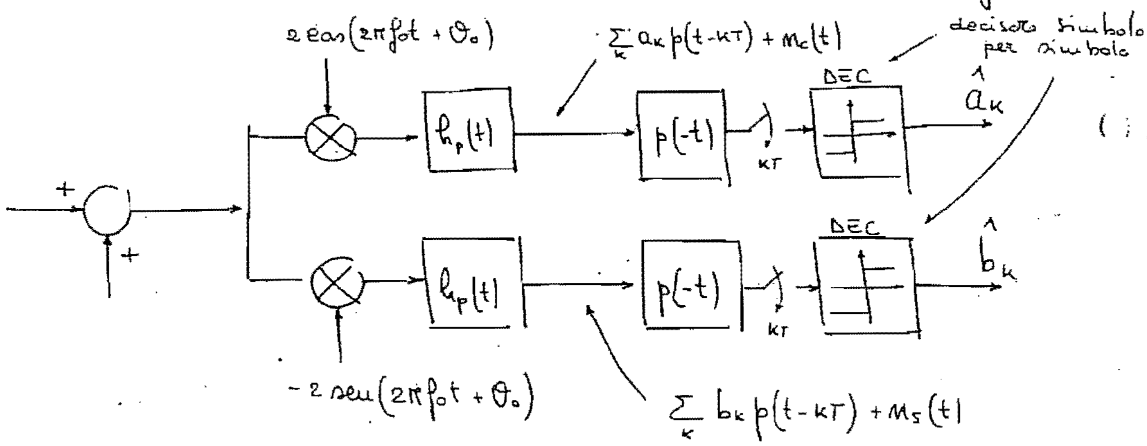
Per la trasmissione in banda passante si generano la componente in fase e quella in quadratura nel modo seguente

$$s(t) = \sum_k a_k \, p(t-kT)\cos(2\pi f_0 t + \theta_0) - \sum_k b_k \, p(t-kT) \operatorname{sen}(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

Lo schema di un trasmettitore in banda passante risulta il seguente.



Il canale introduce un rumore AWGN $n(t)$; il ricevitore può essere schematizzato come segue



In partenza si hanno due segnali PAM M-ari portante in fase e uno sulla portante in quadratura. Questo tipo di trasmissione si dice QAM (Quadrature Amplitude modulation). In particolare si parla di M^2-QAM, nella quale si hanno due PAM M-arie.

L'inviluppo complesso del segnale M^2QAM risulta 157

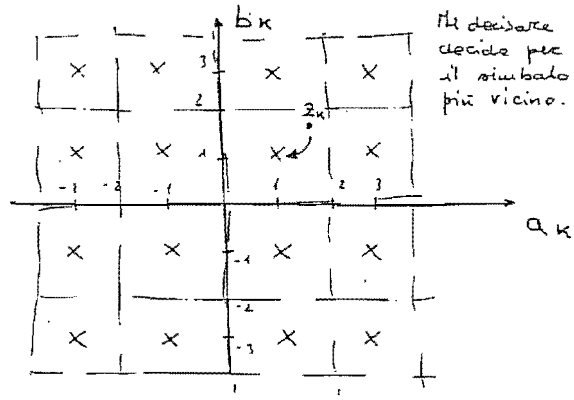
$$\tilde{s}(t) = \sum_k a_k\, p(t-kT) + j \sum_k b_k\, p(t-kT) =$$

$$= \sum_k (a_k + j b_k)\, p(t-kT) =$$

$$= \sum_k c_k\, p(t-kT)$$

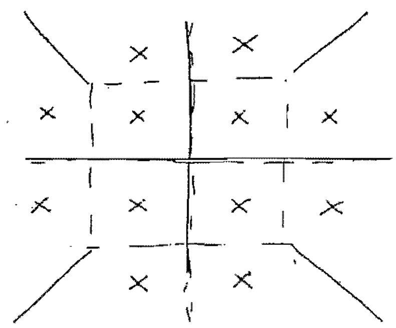
nella quale c_k è un SIMBOLO COMPLESSO. Siccome a_k e b_k appartengano ad uno stesso alfabeto di M simboli c_k và a formare una COSTELLAZIONE DI PUNTI della QUADRATA.

Il decisore può essere indipendente per ciascun ramo; uno decide per il simbolo a_k e uno per il simbolo b_k. In questo caso si parla di M^2-QAM (nella quale M è il numero di simboli)



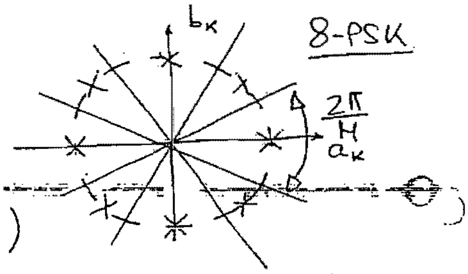
Se invece si scelgano a_k e b_k da alfabeti differenti si possano ottenere costellazioni diverse. Un esempio può essere la π - CROSS (a Croce).

In sostanza si eliminano alcuni dei punti della costellazione in particolare quelli sugli angoli della costellazione precedente. In questo caso il decisore essere unico perchè deve prendere una decisione conoscendo entrambe i simboli.



La scelta di una costellazione differente da quella quadrata risulta utile per diversi motivi. Ad esempio la costellazione 12-CROSS rappresentata in figura, non ha i punti negli angoli; essi sono i simboli con il modulo dell'inviluppo complesso più grande, ovvero quelli che per essere trasmessi richiedono la maggiore energia; questa caratteristica può essere sfruttata per minimizzare la potenza del segnale trasmesso.

Un'alternativa alla QAM è la "modulazione di fase numerica" PSK (Phase Shift Keying). Con essa rimane costante il modulo dell'inviluppo complesso e viene modulato l'argomento.



$$s(t) = A_0 \cos\left[2\pi f t + \vartheta_K\right]$$

in questo caso a_K e b_K non sono indipendenti:

Analogamente si realizza una FSK (Frequency Shift Keying) nella quale

$$s(t) = A_0 \cos\left[2\pi f_K t + \vartheta\right]$$

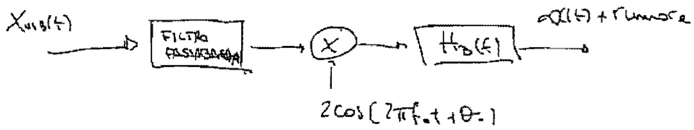
È una modulazione che risponde alle stesse necessità della modulazione CROSS

QAM, CROSS, PSK } modulazioni numeriche LINEARI in banda passante (cambia solo il decisore, per il resto hanno lo stesso schema)

La FSK NON è LINEARE!

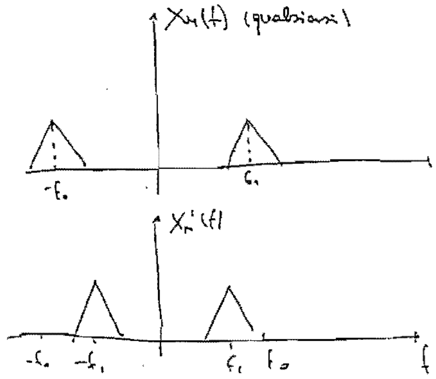
$x_{DSB}(t) = m(t)\cos = T[m]$ ...

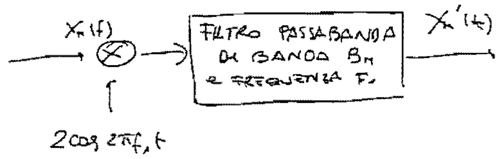
∴ operazione di demodulazione riconduce al segnale iniziale



Per quanto riguarda queste prime parte, se inserisco segnali X_{DSB}, X_{MB} ciò che cambia è solo il filtro passabanda

CONVERSIONE DI FREQUENZA

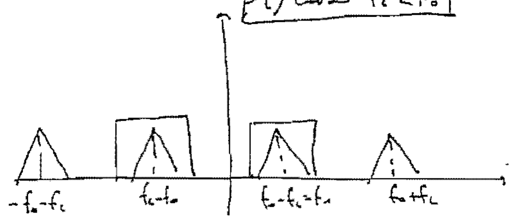




$x_M(t) \longleftrightarrow X_M(f)$

$2x_M(t)\cos 2\pi f_c t \longleftrightarrow X_M(f - f_c) + X_M(f + f_c)$

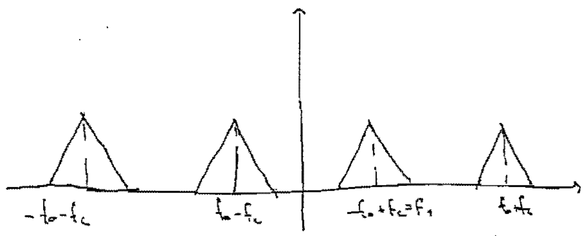
$\boxed{1) \text{ caso } f_1 < f_0}$



scelgo $\underline{f_c = f_0 - f_1}$ e effettuo la conversione di frequenza

$\boxed{2) \text{ caso } f_1 > f_0}$

traslo a sin di f_0



scelgo $f_c = f_0 + f_1$ e effettuo la conversione di frequenza